

CUPRINS

ALGEBRĂ	5
I. Elemente de logică matematică	5
I.1. Noțiunea de propoziție	5
I.2. Operatori logici	5
I.3. Expresii în calculul propozițiilor	7
I.4. Noțiunea de predicat	7
I.5. Cuantificatori	7
I.6. Metoda de demonstrație prin reducere la absurd.....	7
I.7. Proprietăți fundamentale ale operatorilor logici.....	8
II. Mulțimi.....	8
II.1. Egalitatea mulțimilor A și B :	8
II.2. Incluziunea mulțimii A în mulțimea B :	8
II.3. Reuniunea mulțimilor A și B :	9
II.4. Intersecția mulțimilor A și B :	9
II.5. Diferența mulțimilor A și B :	9
II.6. Diferența simetrică a mulțimilor A și B :	9
II.7. Complementara unei mulțimi A în raport cu mulțimea E :	10
II.8. Formulele lui de Morgan ($\forall A, B \subseteq E$).....	10
II.9. Produsul cartezian a două mulțimile A și B :	10
III. Relații binare	11
IV. Funcții.....	12
IV.1. Noțiunea de funcție	12
IV.2. Funcții injective, surjective, bijective	12
IV.3. Compunerea funcțiilor.....	12
IV.4. Funcția inversă	13
V. Operații cu numere reale.....	13
V.1. Puteri naturale ale numerelor reale.....	13
V.2. Identități fundamentale	14
V.3. Radicali. Proprietăți	14
VI. Ecuații și inecuații de gradul întâi.....	15
VI.1. Ecuații de gradul întâi sau ecuații afine	15
VI.2. Inecuații de gradul întâi sau ecuații fine.....	15
VI.3. Modulul unui număr real	16
VII. Numere complexe	17
VII.1. Forma algebrică a numerelor complexe.....	17
VII.2. Modulul unui număr complex	18
VII.2. Forma trigonometrică a numerelor complexe	18
VII.4. Formula lui Moivre	18
VII.5. Extragerea rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex.....	18
VII.6. Ecuația binomă	19
VIII. Ecuații și inecuații de gradul al II-lea.....	19
VIII.1. Ecuații de gradul al doilea.....	19
VIII.2. Inecuații fundamentale de gradul al II-lea	22
VIII.3. Rezolvarea sistemelor de ecuații cu coeficienți reali	22

IX. Ecuații algebrice de gradul III, IV și V	24
X. Logaritmi.....	24
X.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale.....	25
X.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale	26
XI. Metoda inducției matematice.....	26
XI.1. Axioma de recurență a lui Peano	26
XI.2. Metoda inducției matematice.....	26
XI.2. Variantă a metodei inducției matematice	26
XII. Analiză combinatorie	27
XII.1. Permutări	27
XII.2. Aranjamente.....	27
XII.3. Combinări	27
XII.4. Binomul lui Newton.....	27
XII.5. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale.....	28
XIII. Progresii	28
XIII.1. Progresii aritmetice	28
XIII.2. Progresii geometrice	29
XIV. Polinoame	29
XIV.1. Forma algebrică a unui polinom	29
XIV.2. Divizibilitatea polinoamelor	30
XIV.3. Rădăcinile polinoamelor.....	30
XIV.4. Ecuații algebrice	30
XIV.5. Polinoame cu coeficienți din R, Q, Z	31
XV. Permutări, matrici, determinanți	31
XV.1. Permutări	31
XV.2. Matrici	32
XV.3. Determinanți	33
XV.4. Inversa unei matrici	34
XVI. Sisteme lineare	34
XVI.1. Notății:	34
XVI.2. Compatibilitatea	35
XVI.3. Sisteme omogene.....	35
XVII. Structuri algebrice.....	35
XVII.1. Monoid.....	35
XVII.2. Grup	35
XVII.3. Inel.....	36
XVII.4. Corp	37
GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE	37
Notății:	37
I. Triunghiul	38
II. Poligoane convexe.....	38
III. Relații metrice în triunghi	38
III.1. Triunghiul dreptunghic	38
III.2. Triunghiul dreptunghic ABC ($a = b = c$).....	39
III.3. Triunghiul oarecare ABC ($AD \perp BC$)	39

III.4. Relații exprimate prin funcții trigonometrice	39
IV. Patrulater	40
IV.1. Paralelogramul	40
IV.2. Dreptunghiul D C.....	40
IV.3. Rombul	40
IV.4. Pătratul.....	41
IV.5. Trapezul D C.....	41
V. Poligoane înscrise în cerc	41
V.1. Patrulaterul înscris în cerc A	41
V.2. Poligoane regulate înscrise în cercul de rază R	41
VI. Cercul.....	41
VII. Complemente de geometrie plană	42
VIII. Poliedre	43
VIII.1. Prisma.....	43
VIII.2. Piramida	44
VIII.3. Trunchiul de piramidă.....	45
VIII.4. Poliedrul regulat	46
IX. Corpuri rotunde	46
IX.2. Conul circular drept.....	47
IX.3. Trunchiul de con	47
IX.4. Sfera.....	47
X. Funcții trigonometrice	47
X.2. Proprietățile funcțiilor trigonometrice.....	48
XI. Formule trigonometrice	48
XI.1. Relații între funcțiile trigonometrice ale unui argument:.....	48
XI.2. Formule de adunare:.....	49
XI.3. Formule pentru multiplii de argument	49
XI.4. Formule pentru jumătăți de argument:.....	50
XI.5. Sume, diferențe și produse:	50
XII. Inversarea funcțiilor trigonometrice	50
XIII. Soluțiile ecuațiilor trigonometrice simple	51
XIII.1. Ecuații fundamentale	51
XIII.2. Tabele de valori:	51
XIV. Elemente de geometrie analitică	52
XIV.1. Segmente	52
XIV.2. Ecuația dreptei.....	52
XIV.3. Cercul	53
XIV.4. Conice raportate la axele de simetrie	53
ANALIZĂ MATEMATICĂ	54
I. Șiruri.....	54
I.1. Șiruri și limite	54
I.2. Criterii suficiente de convergență sau de existență a limitei unui șir	55
I.2. Operații cu șiruri convergente	55
I.3. Operații cu șiruri care au limită	55
I.4. Șiruri tip	56

II. Limite de funcții	56
II.1. Definiții ale limitei.....	57
II.2. Operații cu limite de funcții	57
II.3. Limite tip	57
II.4. Continuitatea funcțiilor	58
III. Funcții derivabile.....	59
III.1. Definiția derivatei într-un punct.....	59
III.2. Reguli de derivare.....	59
III.3. Derivatele funcțiilor elementare.....	59
III.4. Derivata funcțiilor compuse.....	60
III.5. Derivatele de ordin superior ale unor funcții elementare.....	61
III.6. Proprietăți ale funcțiilor derivabile	61
IV. Asimptote.....	62
IV.1. Asimptote orizontale	62
IV.2. Asimptote oblice	62
IV.3. Asimptote verticale	62
V. Primitive.....	62
Integrarea prin părți	63
V.1. Prima metodă de schimbare a variabilei.....	63
V.2. A doua metodă de schimbare a variabilei.....	63
V.3. Tabel de primitive.....	63
V.4. Primitivele funcțiilor raționale	64
VI. Integrale definite	64
IV.1. Definiția integrabilității (integrale Riemann)	64

ALGEBRĂ

I. Elemente de logică matematică

I.1. Noțiunea de propoziție

Definiția I.1.1. *Se numește propoziție un enunț despre care se poate spune că este adevărat sau fals, dar nu și adevărat și fals simultan.*

Se notează cu p, q, P, Q

Ex: 1) $\pi \notin \mathbb{Q}$: acesta este un enunț care exprimă un adevăr, deci o propoziție adevărată.

2) $x + 5 = 3, x \in \mathbb{N}$ este o propoziție falsă, pentru că nu există nici un număr natural astfel ca $x + 5 = 3$

3) $x \leq y, x, y \in \mathbb{N}$ este un enunț despre care nu se poate spune nimic. Deci nu este o propoziție.

Valoarea logică sau valoarea de adevăr a unei propoziții. Dacă o propoziție p este adevărată se spune că are valoarea logică sau valoarea de adevăr: adevărul; această valoare de adevăr se notează cu simbolul 1 sau a și scriem $v(p) = 1$ sau $(v)p = a$. Dacă o propoziție q este falsă, se spune că are valoarea de adevăr: falsul; această valoare de adevăr se notează cu simbolul 0 sau f și scriem $v(q) = 0$ sau $v(q) = f$.

I.2. Operatori logici

Negația

Definiția I.1.2. **Negația unei propoziții p este propoziția care este falsă când p este adevărată și este adevărată când p este falsă.** Se notează: $\text{non } p, \neg p, \bar{p}$.

Tabela de adevăr a propoziției $\text{non } p$ se întocmește pe baza relației $v(\text{non } p) = 1 - v(p)$.

p	$\text{non } p$
1	0
0	1

Conjunția

Definiția I.2.2. **Conjunția a două propoziții p și q este propoziția care este adevărată dacă și numai dacă fiecare propoziție p și q este adevărată.**

Se notează: $p \wedge q$

Tabela de adevăr a propoziției $p \wedge q$ este:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjuncția

Definiția I.2.3. **Disjuncția** a două propoziții p și q este propoziția care este adevărată dacă și numai dacă cel puțin una din propozițiile p , q este adevărată.

Se notează: $p \vee q$

Tabela de adevăr a propoziției $p \vee q$ este:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implicația

Definiția I.2.4. **Implicația** propozițiilor p și q este propoziția care este falsă dacă și numai dacă p este adevărată și q este falsă.

Se notează: $(\text{non } p)$ sau q , $p \rightarrow q$ și se citește: “ p implică q ” sau “dacă p , atunci q ”. Propoziția p este ipoteza, iar propoziția q este concluzia.

Tabela de adevăr a propoziției $p \rightarrow q$ este:

p	q	$\text{non } p$	$(\text{non } p) \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Echivalența logică

Definiția I.2.4. Propozițiile p și q sunt **echivalente logic**, dacă și numai dacă p , q sunt adevărate sau false simultan.

Se notează $(\text{non } p) \vee q$ și $(\text{non } q) \vee p$; $(p \rightarrow q)$ și $(q \rightarrow p)$; $p \leftrightarrow q$; se citește: “ p echivalent cu q ” sau “ p dacă și numai dacă q ”, “ p este condiție necesară și suficientă pentru q ”.

Tabela de adevăr a propoziției compuse $p \leftrightarrow q$ este:

p	q	$\text{non } p$	$\text{non } q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

I.3. Expresii în calculul propozițiilor

Propozițiile p, q, r, \dots fiind date, cu ajutorul operatorilor logici $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ putem formula diferite expresii, care se numesc **formule ale calculului cu propoziții sau expresii logice**. Ele se notează α sau $\alpha(p, q, r, \dots), \beta(p, q, r, \dots)$.

Înlocuind în α pe p, q, r, \dots cu diferite propoziții obținem o altă propoziție, adevărată sau nu, a cărei valoare de adevăr se numește **valoarea expresiei α** , obținută pentru propozițiile p, q, r, \dots respective.

Definiția I.3.1. *O expresie logică α care se reduce la o propoziție adevărată, oricare ar fi propozițiile p, q, r, \dots se numește **tautologie**.*

Definiția I.3.2. *Două expresii logice α și β se numesc **echivalente** dacă și numai dacă pentru orice propoziții p, q, r, \dots cele două expresii reprezintă propoziții care au aceeași valoare de adevăr. În scris se notează $\alpha \equiv \beta$.*

I.4. Noțiunea de predicat

Definiția I.4.1. *Se numește **predicat sau propoziție cu variabile** un enunț care depinde de o variabilă sau de mai multe variabile și are proprietatea că pentru orice valori date variabilelor se obține o propoziție adevărată sau o propoziție falsă.*

Predicatele se notează $p(z, y, z, \dots), q(x, y, z, \dots)$ și pot fi unare (de o variabilă), binare (de două variabile), ternare (de trei variabile), etc., variabilele x, y, z, \dots luând valori în mulțimi date.

Definiția I.4.2. *Predicatele $p(z, y, z, \dots), q(x, y, z, \dots)$ se numesc **echivalente** dacă, oricare ar fi valorile pe care le iau x, y, z, \dots în unul și același domeniu, propozițiile corespunzătoare au aceleași valori de adevăr. Scriem $p(z, y, z, \dots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \dots)$.*

I.5. Cuantificatori

Definiția I.5.1. *Fie $p(x)$, cu $x \in M$, un predicat. Dacă există (cel puțin) un element $x' \in M$, astfel încât propoziția $p(x')$ este adevărată, atunci scriem $\exists x p(x)$, $(\exists x)p(x)$ sau $(\exists x \in M)p(x)$. Simbolul \exists se numește **cuantificator existențial** și se citește “există”.*

Definiția I.5.2. *Fie $p(x)$ cu $x \in M$, un predicat. Dacă $p(x)$ este o propoziție adevărată pentru orice $x \in M$, atunci scriem $\forall x p(x)$, $(\forall x)p(x)$ sau $(\forall x \in M)p(x)$. Simbolul \forall se numește **cuantificator universal** și se citește “oricare ar fi”.*

Proprietatea de comutativitate a cuantificatorilor:

1. $(\forall x)(\forall y)p(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x, y)$;
2. $(\exists x)(\exists y)p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x, y)$;

Reguli de negare:

1. $\neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg p(x)$;
2. $\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg p(x)$;
3. $\neg(\exists x)(\exists y)p(x, y) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\neg p(x, y)$;
4. $\neg(\forall x)(\forall y)p(x, y) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\neg p(x, y)$;

I.6. Metoda de demonstrație prin reducere la absurd

Această metodă se bazează pe tautologia $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$, care ne arată că pentru a demonstra că $p \rightarrow q$, este totuna cu a demonstra că $\neg p \vee q$.

I.7. Proprietăți fundamentale ale operatorilor logici

Oricare ar fi propozițiile p, q, r, \dots avem:

1. $\text{non}(\text{non } p) \equiv p$;
2. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (comutativitatea conjuncției);
3. $((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$ (asociativitatea conjuncției);
4. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (comutativitatea disjuncției);
5. $((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$ (asociativitatea disjuncției);
6. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ (tranzitivitatea implicației);
7. $\text{non}(p \wedge q) \equiv (\text{non } p) \vee (\text{non } q)$ legile lui de Morgan;
 $\text{non}(p \vee q) \equiv (\text{non } p) \wedge (\text{non } q)$
8. $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ conjuncția este distributivă în raport cu disjuncția și
 $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ disjuncția este distributivă în raport cu conjuncția

II. Mulțimi

Moduri de definire a mulțimilor. Mulțimile se definesc fie prin indicarea elementelor lor (de pildă $\{0,1,3\}$ sau $\{x,y,z\}$), fie prin specificarea unei proprietăți caracteristice a elementelor lor (de exemplu $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$).

Mulțimile se notează cu litere mari: $A, B, C, \dots X, Y, Z$, iar elementele lor cu litere mici: a, b, c, \dots

Apartenența unui element la o mulțime. Dacă un element a aparține unei mulțimi A , acesta se notează $a \in A$ și se citește “ a aparține lui A ”.

Definiție. **Mulțimea vidă** este mulțimea care nu are nici un element. Se notează cu \emptyset .

II.1. Egalitatea mulțimilor A și B :

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ și } (\forall y \in B \Rightarrow y \in A)$$

Proprietățile egalității:

1. $\forall A, A = A$ (reflexivitatea);
2. $(A = B) \Rightarrow (B = A)$ (simetria);
3. $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow (A = C)$ (tranzitivitatea);

II.2. Incluziunea mulțimii A în mulțimea B :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Mulțimea A se numește o parte sau o submulțime a lui B .

Proprietățile incluziunii:

1. $\forall A, A \subset A$ (reflexivitatea);
2. $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow (A = B)$ (antisimetria);
3. $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ (tranzitivitatea);
4. $\forall A, \emptyset \subset A$

Relația de neincluziune se notează $A \not\subset B$.

II.3. Reuniunea mulțimilor A și B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Proprietățile reuniunii:

1. $\forall A, B: A \cup B = B \cup A$ (reflexivitatea);
2. $\forall A, B, C: (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativitatea);
3. $\forall A: A \cup A = A$ (idempotența);
4. $\forall A: A \cup \emptyset = A$;
5. $\forall A, B: A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$.

II.4. Intersecția mulțimilor A și B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Proprietățile intersecției:

1. $\forall A, B: A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea);
2. $\forall A, B, C: (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea);
3. $\forall A: A \cap A = A$ (idempotența);
4. $\forall A: A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $\forall A, B: A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$
6. $\forall A, B, C: (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivitatea intersecției față de reuniune);
7. $\forall A, B, C: (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivitatea reuniunii față de intersecție);
8. $\forall A, B: A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$ (absorbția).

Definiție. *Mulțimile A și B care nu au nici un element comun se numesc disjuncte. Pentru ele avem $A \cap B = \emptyset$.*

II.5. Diferența mulțimilor A și B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Proprietățile diferenței:

1. $\forall A: A \setminus A = \emptyset$;
2. $\forall A, B, C: (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
3. $\forall A, B: A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
4. $\forall A, B: A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;
5. $\forall A, B, C: A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
6. $\forall A, B, C: A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
7. $\forall A, B, C: (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
8. $\forall A, B, C: (A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$.

II.6. Diferența simetrică a mulțimilor A și B :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Proprietățile diferenței simetrice:

1. $\forall A: A \Delta A = \emptyset$;

2. $\forall A, B: A \Delta B = B \Delta A$ (comutativitatea);
3. $\forall A: A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$;
4. $\forall A, B, C: (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (asociativitatea);
5. $\forall A, B, C: A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
6. $\forall A, B: A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$

II.7. Complementara unei mulțimi A în raport cu mulțimea E :

(A fiind o parte a lui E , adică $A \subset E$)

$$C_E A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$$

Proprietăți: ($\forall A, B \subset E$)

1. $C_E(C_E A) = A$ (principiul reciprocității);
2. $C_E A = E \setminus A$;
3. $C_E \emptyset = E$;
4. $C_E E = \emptyset$;
5. $A \cup C_E A = E$ (principiul excluderii terțiului);
6. $A \cap C_E A = \emptyset$ (principiul necontradicției);
7. $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$;
8. $A \setminus B = C_E(A \cap B)$.

II.8. Formulele lui de Morgan ($\forall A, B \subset E$)

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B.$$

II.9. Produsul cartezian a două mulțimile A și B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Proprietățile produsului cartezian ($\forall A, B, C, D$ avem):

1. $A \times B \neq B \times A$, dacă $A \neq B$;
2. $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$;
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
5. $(A \setminus B) \times C = A \times C \setminus B \times C$;
6. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Definiția II.9.1. *Mulțimile A și B se numesc echipotente dacă există o bijecție de la A la B .*

Definiția II.9.2. *Fie E o mulțime. Aceasta se numește finită dacă $E = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât E este echipotentă cu mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$.*

Definiția II.9.3. *O mulțime E se numește infinită dacă ea nu este finită. Exemple de mulțimi infinite sunt: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .*

Definiția II.9.4. *Fie E o mulțime. Aceasta se numește numărabilă dacă este echipotentă cu \mathbb{N} . Exemplu: Mulțimea numerelor raționale.*

Definiția II.9.5. *O mulțime se numește cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.*

Definiția II.9.6. *Fie E o mulțime. Se numește cardinalul acestei mulțimi un simbo asociat ei, notat $|E|$ sau $\text{card } E$, astfel încât $|E| = |F|$, dacă și numai dacă E este echipotentă cu F ; cardinalul mulțimii vide se notează cu 0 , cardinalul mulțimii*

$\{1, 2, \dots, n\}$ cu $n \in \mathbb{N}$, se notează cu n , iar cardinalul mulțimii \mathbb{N} se notează cu x_0 (alef zero).

Teorema II.9.1. Fie A și B două mulțimi finite. Atunci:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Teorema II.9.2. Fie A, B și C trei mulțimi finite. Atunci:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

III. Relații binare

Relația binară pe o mulțime

Definiția III.1. Fie M o mulțime nevidă. Se numește relația binară R pe M o parte a produsului cartezian $M \times M$. Dacă $x \in M$ este relația R cu $y \in M$, atunci scriem xRy sau $(x, y) \in R$. Deci o relație binară se referă la perechile de elemente din M .

Proprietăți ale relațiilor binare pe o mulțime:

1. Relația binară R pe mulțimea M se numește reflexivă dacă $\forall a \in M$ avem pe aRa .
2. Relația binară R pe mulțimea M se numește simetrică dacă $\forall a, b \in M$ avem aRb implică bRa .
3. Relația binară R pe mulțimea M se numește antisimetrică dacă $\forall a, b \in M$, aRb și bRa implică $a=b$.
4. Relația binară R pe mulțimea M se numește tranzitivă dacă $\forall a, b, c \in M$, aRb implică bRc implică aRc .

Definiția III.2. Se numește graficul relației R definită pe M mulțimea $G = \{(x, y) | xRy\}$.

Definiția III.3. O relație binară R definită pe o mulțime nevidă M se numește relație de echivalență dacă ea este reflexivă, tranzitivă și simetrică.

Exemplu: Fie \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și numărul 3 fixat. Pe \mathbb{N} stabilim următoarea relație R : a și b din \mathbb{N} sunt în relație cu R , dacă a și b împărțite la 3 dau același rest. Scriem $a \equiv b \pmod{3}$; de pildă $4 \equiv 1 \pmod{3}$. Aceasta este o relație de echivalență.

Definiția III.4. Fie M o mulțime. R o relație de echivalență pe M și a un element fixat din M . Se numește clasă de echivalență corespunzătoare elementului a mulțimea $C_a = \{x \in M | xRa\}$. Două clase de echivalență C_a și C_b sau coincid (când aRb) sau sunt disjuncte.

Definiția III.5. Fie M o mulțime și R o relație de echivalență pe M . Se numește mulțimea cât a lui M în raport cu relația R și se notează M/R mulțimea claselor de echivalență.

Definiția III.6. Fie M o mulțime nevidă. Se numește relație de ordin pe M o relație binară care este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică.

Se notează: “ $<$ ” sau “ \leq ”

De exemplu: relația cunoscută de ordine naturală “ \leq ” pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și \mathbb{R} este o relație de ordine.

Definiția III.7. Fie M o mulțime nevidă și “ \leq ” o relație de ordin pe M . Această relație de ordin se numește relație de ordine totală dacă oricare două elemente ale lui M sunt comparabile adică $\forall a, b \in M$ avem sau $a < b$ sau $b < a$. Mulțimea înzestrată cu o relație de ordine totală se numește mulțime total ordonată.

Definiția III.8. Fie M o mulțime nevidă. O relație de ordine pe M se numește relație de bună ordonare dacă orice parte nevidă a lui M are un cel mai mic element. Mulțimea M , cu această relație de bună ordonare, se zice bine ordonată.

O relație de bună ordonare pe M este o relație de ordine totală pe M .

IV. Funcții

IV.1. Noțiunea de funcție

Definiția IV.1.1. Fie A și B două mulțimi. Prin funcție definită pe mulțimea A , cu valori în mulțimea B se înțelege orice lege (procedeu sau convenție) f , în baza căreia oricărui element $a \in A$ i se asociază un unic element, notat $f(a)$, din B . Mulțimea A se numește domeniu de definiție, iar mulțimea B se numește codomeniu de definiție sau domeniul valorilor funcției.

Definiția IV.1.2. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Prin graficul acestei funcții înțelegem submulțimea G_f a produsului cartezian $A \times B$ formată din toate perechile $(a, f(a))$, $a \in A$. deci $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$

Definiția IV.1.3. Se numește funcție numerică o funcție $f: A \rightarrow B$, pentru care atât domeniul de definiție A cât și domeniul valorilor B sunt submulțimi ale mulțimilor numerelor reale (deci $A, B \subset \mathbb{R}$).

IV.2. Funcții injective, surjective, bijective

Definiția IV.2.1. Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Spunem că f este o funcție injectivă, dacă pentru oricare două elemente x și y ale lui A , $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$. Faptul că f este injectivă se mai exprimă și altfel: $\forall x, y \in A: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

De exemplu: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin formula $f(x) = x^2$, este injectivă, dar $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x) = x^2$ nu este o funcție injectivă deoarece $g(-2) = g(2) = 4$.

Definiția IV.2.2. O funcție $f: A \rightarrow B$ este o funcție surjectivă, dacă pentru orice $b \in B$ există cel puțin un element $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$. Deci $f: A \rightarrow B$ nu este surjectivă dacă $\exists b \in B$ avem $f(a) \neq b (\forall a \in A)$.

De exemplu: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \neq 0$ este surjectivă.

Definiția IV.2.3. O funcție $f: A \rightarrow B$ care este simultan injectivă și surjectivă se numește funcție bijectivă.

De exemplu: Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Funcția f este bijectivă.

IV.3. Compunerea funcțiilor

Definiția IV.3.1. Fie funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: B \rightarrow C$ (domeniul de definiție al funcției g coincide cu codomeniul funcției f). Fie $a \in A$, atunci $f(a) \in B$, deci există imaginea sa prin g , adică $g(f(a)) \in C$. Astfel putem defini o funcție $h: A \rightarrow C$ unde

$h(a) = g(f(a))$ pentru $\forall a \in A$. Funcția h astfel definită se notează $g \circ f$ (sau gf) și se numește compunerea funcției g cu funcția f .

Observații:

1. Dacă $f:A \rightarrow B$ și $g:C \rightarrow D$ sunt două funcții, are sens să vorbim de compunerea funcției g cu funcția f numai dacă $B = C$.
2. Dacă $f:A \rightarrow B$ și $g:B \rightarrow A$ sunt două funcții, are sens $g \circ f:A \rightarrow A$ și $f \circ g:B \rightarrow B$. în general $f \circ g \neq g \circ f$.

Teoremă. Fie $f:A \rightarrow B$ și $g:B \rightarrow C$ și $h:C \rightarrow D$ trei funcții. Atunci fiecare din funcțiile $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ are sens și există egalitatea: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

IV.4. Funcția inversă

Definiția IV.4.1. Fie A o mulțime oarecare. Notăm cu $1_A:A \rightarrow A$ funcția definită astfel: $1_A(a) = a$ pentru $\forall a \in A$. 1_A se numește funcția identică a mulțimii A .

Propoziție. Fie A o mulțime și 1_A funcția sa identică. Atunci:

1. Pentru orice mulțime B și pentru orice funcție $f:A \rightarrow B$ avem $f \circ 1_A = f$
2. Pentru orice mulțime C și pentru orice funcție $g:C \rightarrow A$ avem $1_A \circ g = g$

Definiția IV.4.2. O funcție $f:A \rightarrow B$ se numește inversabilă dacă există o funcție $g:B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Teoremă. O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

V. Operații cu numere reale

V.1. Puteri naturale ale numerelor reale

1. $(+a)^n = +a^n$
2. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$
3. $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
4. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
5. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$
6. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
7. $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$;
8. $\frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = a^{-m}$, $a \neq 0$;
9. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$;
10. $a^0 = 1$, $a \neq 0$;
11. $0^n = 0$, $n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Puterile numerelor reale se extind atât pentru exponenți raționali pozitivi sau negativi, cât și pentru exponenți reali, puterile reale fiind definite cu ajutorul șirurilor de puteri raționale. Aceste puteri au proprietăți identice cu exponenți numere naturale.

V.2. Identități fundamentale

Oricare ar fi $x, y, z, t, a, b, c \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, avem:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$;
2. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ax + by)^2$;
3. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax - by - cz - bt)^2 + (bx + ay - dz - ct)^2 + (cx + dy + az - bt)^2 + (dx - cy + bz + at)^2$;
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
6. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$;
7. $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$;
8. $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$;
9. $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - ab)^2 + (a^2 + b^2 + ab)^2$;
10. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
11. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
12. $(1 + a)(1 + a^2 + a^4) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$;
13. $a^6 + b^6 = (a^3 - 2ab^2)^2 + (b^3 - 2a^2b)^2$ (G. de Recquigny-Adanson);
14. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
15. $a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2)(a^{2n-2} + a^{2n-4}b^2 + \dots + a^2b^{2n-4} + b^{2n-2})$;
16. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + \dots + ab^{2n-1} + b^{2n})$;
17. $(1 + a + a^2 + \dots + a^n)(1 + a^{n+1}) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{2n+1}$.

V.3. Radicali. Proprietăți

1. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}, a > 0$;
2. $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}, a > 0$;
3. $(\sqrt[m]{a})^m = a, a \geq 0$;
4. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}, a, b \geq 0$;
5. $\left(\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right)^m = \frac{1}{a}, a > 0$;
6. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}, a, b, c \geq 0$;
7. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$;
8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a^{m+n}}, a \geq 0$;
9. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a^{m-n}}, a > 0$;
10. $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m, a \geq 0$;
11. $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}, a \geq 0$;
12. $\sqrt[m]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}, a > 0$;
13. $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} \cdot b^{qm}}, a, b \geq 0$;

$$14. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, a \geq 0;$$

$$15. \sqrt[m]{a^p} : \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{pn} : b^{qm}}, a \geq 0, b > 0;$$

$$16. \sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbb{R};$$

$$17. \sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}} = -\sqrt[2n+1]{a}, a \geq 0;$$

$$18. \left(\sqrt[2n+1]{-a}\right)^{2n+1} = -a, a \geq 0;$$

$$19. \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}, a, b \geq 0;$$

$$20. \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ dac\u0103 \u0219i numai dac\u0103 } A^2 - B = C^2;$$

$$21. \text{Expresia conjugat\u0103 a lui } \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \text{ este } \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ iar pentru } \sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \text{ este } \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$

VI. Ecua\u0219ii \u0219i inecua\u0219ii de gradul \u00eent\u0103i

VI.1. Ecua\u0219ii de gradul \u00eent\u0103i sau ecua\u0219ii afine

$$ax + b = 0, a, b, x \in \mathbb{R}$$

Fie S mul\u0219imea de solu\u0219ii a acestei ecua\u0219ii. Dac\u0103

$$1. a \neq 0, x = -\frac{b}{a} \text{ (solu\u0219ie unic\u0103)}. S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

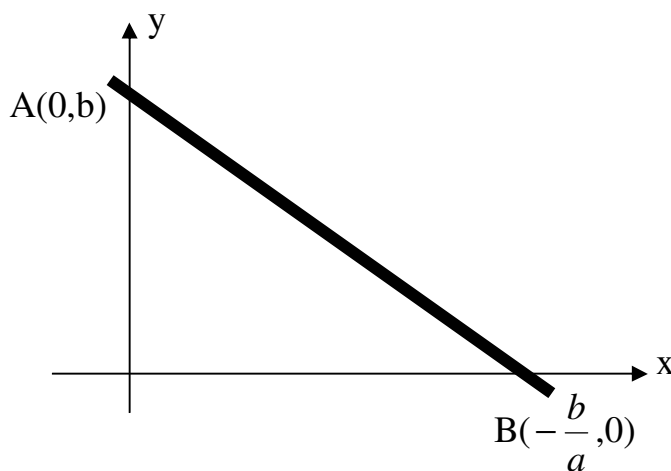
$$2. a = 0 \text{ \u0219i } b \neq 0, \text{ ecua\u0219ia nu are solu\u0219ii: } S = \emptyset;$$

$$3. a = 0 \text{ \u0219i } b = 0, \text{ orice num\u0103r real } x \text{ este solu\u0219ie a ecua\u0219iei afine date; } S = \mathbb{R}.$$

Semnul func\u0219iei afine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f(X)		0	
	semn contrar lui a		semnul lui a

Graficul func\u0219iei de gradul \u00eent\u0103i va fi o linie dreapt\u0103.



VI.2. Inecua\u0219ii de gradul \u00eent\u0103i sau ecua\u0219ii fine

Cazul 1. $ax + b > 0, a, b, x \in \mathbb{R}$. Fie S mul\u0219imea solu\u0219iilor. Dac\u0103:

$$1. a > 0, S = \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right);$$

$$2. a < 0, S = (-\infty, -\frac{b}{a});$$

$$3. a = 0, b > 0, S = \mathbb{R};$$

$$4. a = 0, b = 0, S = \emptyset.$$

Cazul 2. $ax + b = 0, a, b, x \in \mathbb{R}$. Dacă:

$$1. a > 0, S = (+\infty, -\frac{b}{a}]$$

$$2. a < 0, S = [-\frac{b}{a}, +\infty)$$

$$3. a = 0, b = 0, S = \mathbb{R};$$

$$4. a = 0, b > 0, S = \emptyset.$$

Inecuațiile $ax + b < 0$ și $ax + b \geq 0$ se reduc la cele două cazuri (prin înmulțirea inecuației respective cu -1 și schimbarea sensului inegalităților).

VI.3. Modulul unui număr real

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{daca } x < 0 \\ 0, & \text{daca } x = 0 \\ x, & \text{daca } x > 0 \end{cases}$$

Proprietăți: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$1. |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2. |-x| = |x|;$$

$$3. |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x = -y;$$

$$4. |x| = a \Leftrightarrow -a = x = a, a \in \mathbb{R};$$

$$5. -|x| \leq x \leq |x|;$$

$$6. |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$7. |x - y| \leq |x| + |y|$$

$$8. ||x| - |y|| \leq |x - y|;$$

$$9. ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$10. |xy| = |x| \cdot |y|;$$

$$11. \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0.$$

Ecuatii și inecuații fundamentale, care conțin modulul:

$$1. |x - a| = b, (a, b, x \in \mathbb{R}, S = \text{mulțimea soluțiilor})$$

b	S
$b < 0$	\emptyset
$b = 0$	a
$b > 0$	$\{a - b; a + b\}$

$$2. |x - a| > b$$

b	S
$b < 0$	\mathbb{R}
$b = 0$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$b > 0$	$\{-\infty, a - b\} \cup \{a + b, \infty\}$

3. $|x - a| < b$

b	S
$b < 0$	\emptyset
$b = 0$	\emptyset
$b > 0$	$\{a - b; a + b\}$

VII. Numere complexe

Definiția VII.1. *Se numește număr complex orice element $z=(a,b)$ al mulțimii $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}\}$, înzestrată cu două operații algebrice, adunarea: $\forall z=(a,b), \forall z'=(a',b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z + z' = (a + a', b + b')$ și înmulțirea: $\forall z=(a,b), \forall z'=(a',b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z \cdot z' = (aa' - bb', ab' + a'b)$. Mulțimea numerelor complexe se notează cu \mathbb{C} și este corp comutativ.*

VII.1. Forma algebrică a numerelor complexe

$z = a + ib$, cu $a = (a,0)$, $b = (b,0)$ și $i = (0,1)$, respectiv $i^2 = -1$.

Egalitatea a două numere complexe z și z' :

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ și } b = b'$$

Adunarea numerelor complexe are proprietățile:

este asociativă, comutativă, admite ca element neutru pe 0 și orice număr complex $a + bi$ admite un opus $-a - ib$.

Înmulțirea numerelor complexe are proprietățile:

este asociativă, comutativă, admite ca element neutru pe 1 și orice număr complex

$a + bi$ nenul admite un invers $\left((a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right)$; este distributivă față

de adunare $z(z' + z'') = zz' + zz'' \quad \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$.

Puterile numărului i : $\forall m \in \mathbb{N}, i^{4m} = 1, i^{4m+1} = i, i^{4m+2} = -1, i^{4m+3} = -i$.

Definiția 2.1.1. **Dacă $z = a + bi$, atunci numărul $a - ib$ se numește conjugatul lui z și se notează $a - ib = \overline{a + ib} = \overline{z}$.**

Au loc următoarele proprietăți, $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$.

1. $z + \overline{z} = 2a$;
2. $z - \overline{z} = 2bi$;
3. $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$;
4. $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;
5. $zz' = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$;

$$\begin{aligned} 6. \quad \frac{z}{z'} &= \frac{\overline{z'}z}{z\overline{z}}; \\ 7. \quad \overline{z^n} &= (\overline{z})^n; \\ 8. \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} &= \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}. \end{aligned}$$

VII.2. Modulul unui număr complex

$$\forall z \in \mathbb{C}$$

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} \quad \text{sau} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Avem apoi:

$$\begin{aligned} 1. \quad |z| &= |\overline{z}| \\ 2. \quad |z + z'| &\leq |z| + |z'|; \\ 3. \quad |z| - |z'| &\leq |z + z'| \leq |z| + |z'|; \\ 4. \quad |zz'| &= |z||z'|; \\ 5. \quad \left|\frac{z'}{z}\right| &= \frac{|z'|}{|z|}, |z| \neq 0. \end{aligned}$$

VII.2. Forma trigonometrică a numerelor complexe

$$z = r(\cos u + i \sin u)$$

unde $r = |z|$, iar unghiul $u \in [0, 2\pi)$ este soluția ecuațiilor trigonometrice $r \cos u = a$ și $r \sin u = b$.

De exemplu: dacă $z = -1 - i$, atunci $|z| = \sqrt{2}$, $u = \frac{5\pi}{4}$ și $z = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$.

VII.4. Formula lui Moivre

$$\forall u \in \mathbb{R} \text{ și } \forall n \in \mathbb{N}, (\cos u + i \sin u)^n = \cos(nu) + i \sin(nu)$$

Consecințele formulei lui Moivre

$$\cos nu = \cos^n u + C_n^2 \cos^{n-2} u \sin^2 u + C_n^4 \cos^{n-4} u \sin^4 u + \dots;$$

$$\sin nu = C_n^1 \cos^{n-1} u \sin u + C_n^3 \cos^{n-3} u \sin^3 u + \dots;$$

$$\operatorname{tg} nu = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} u - C_n^2 \operatorname{tg}^3 u + C_n^5 \operatorname{tg}^5 u - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 u + C_n^4 \operatorname{tg}^4 u - \dots}.$$

VII.5. Extragerea rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex

$$z = r(\cos u + i \sin u)$$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{u + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{u + 2k\pi}{n} \right], k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Pentru simplificare folosim următoarea notație:

$$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \varepsilon_k \text{ și } \left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \omega_k$$

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right)$$

VII.6. Ecuația binomă

$$x^n - A = 0, A \in \mathbb{C}, A = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$x_k = |A|^{1/n} \omega_k, k = \overline{0, n-1}, A \in \mathbb{R}, A < 0;$$

$$x_k = A^{1/n} \varepsilon_k, k = \overline{0, n-1}, A \in \mathbb{R}, A > 0;$$

$$x_k = \sqrt[n]{p} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = \overline{0, n-1}, A \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

VIII. Ecuații și inecuații de gradul al II-lea

VIII.1. Ecuații de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

1. Formule de rezolvare: $\Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac; \text{ sau}$$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}, b = 2b', \Delta' = b'^2 - ac.$$

2. Formule utile în studiul ecuației de gradul al II-lea:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 2SP$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 2x_1^2x_2^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$$

3. Discuția naturii și semnul rădăcinilor în funcție de semnele lui $\Delta = b^2 - 4ac$, $P = x_1x_2$, $S = x_1 + x_2$.

Δ	P	S	Natura și semnul rădăcinilor
$\Delta < 0$	-	-	Rădăcini complexe: $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	-	-	Rădăcini reale și egale $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	$P > 0$	$S > 0$	Rădăcini reale pozitive
	$P > 0$	$S < 0$	Rădăcini reale negative
	$P < 0$	$S > 0$	Rădăcini reale și de semne contrare; cea pozitivă este mai mare decât valoarea absolută a celei negative
	$P < 0$	$S < 0$	Rădăcini reale și de semne contrare; cea negativă este mai mare în valoare absolută.

4. Semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\Delta > 0: a \neq 0, x_1 < x_2.$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f(x)	semnul lui a		0 semn contrar lui a 0	semnul lui a

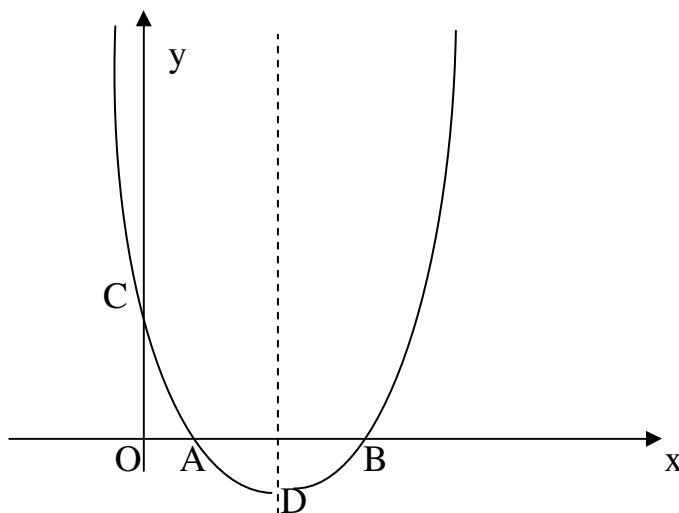
$$\Delta = 0$$

X	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
f(x)	semnul lui a		0
	semnul lui a		

$$\Delta < 0$$

X	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	semnul lui a	

5. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ este o *parabolă*. Această funcție se poate scrie și sub forma $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, numită formă canonică.



$$\Delta > 0$$

$$a > 0$$

$$A(x_1, 0)$$

$$B(x_2, 0)$$

$$C(0, c)$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

6. Maximul sau minimul functiei de gradul al doilea

1. Dacă $a > 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, minim ce se realizează pentru $x = \frac{-b}{2a}$
2. Dacă $a < 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un maxim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, maxim ce se realizează pentru $x = \frac{-b}{2a}$

7. Intervale de monotonie pentru functia de gradul al doilea

Teoremă. Fie funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

1. Dacă $a > 0$, funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ și strict crescătoare pe intervalul $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$.
2. Dacă $a < 0$, funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$.

Observație: Intervalele $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ și $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ se numesc **intervale de monotonie ale funcției f** .

Descompunerea trinomului $f(x) = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, x_1 și x_2 fiind rădăcinile trinomului.

1. $\Delta > 0$, $f(x) = a(X - x_1)(X - x_2)$;
2. $\Delta = 0$, $f(x) = a(X - x_1)^2$;
3. $\Delta < 0$, $f(x)$ este ireductibil pe \mathbb{R} , deci $f(x) = aX^2 + bX + c$

Construirea unei ecuații de gradul al doilea când se cunosc suma și produsul rădăcinilor ei: $x^2 - Sx + P = 0$, cu $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1x_2$.

Teoremă: Ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$ și $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $\forall a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, $a, a' \neq 0$, au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$$

Condiții necesare și suficiente pentru ca numerele reale date α și β să fie în anumite relații cu rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, respectiv, pentru ca $f(x)$ să păstreze un semn constant $\forall x, x \in \mathbb{R}$.

Nr.crt.	Relații între x_1, x_2, α și β	Condiții necesare și suficiente
1	$\alpha < x_1 < \beta < x_2$ sau $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$	1. $f(\alpha)f(\beta) < 0$
2	$\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta$	1. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 2. $af(\alpha) > 0$ 3. $af(\beta) > 0$ 4. $\alpha < \frac{-b}{2a}$ 5. $\beta > \frac{-b}{2a}$
3	$x_1 < \alpha < \beta < x_2$	1. $af(\alpha) < 0$ 2. $af(\beta) < 0$ ceea ce atrage după sine $\Delta > 0$

4	$x_1 < \alpha < x_2$	1. $af(\alpha) < 0$
5	$\alpha < x_1 \leq x_2$	1. $\Delta = 0$ 2. $af(\alpha) > 0$ 3. $\alpha < \frac{-b}{2a}$
6	$x_1 \leq x_2 < \alpha$	1. $\Delta = 0$ 2. $af(\alpha) > 0$ 3. $\frac{-b}{2a} < \alpha$

7	$f(X) = 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$	1. $\Delta \leq 0$ 2. $a > 0$
8	$f(X) \leq 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$	1. $\Delta \leq 0$ 2. $a < 0$

Observație: Rezolvarea ecuației bipătrate $ax^{2n} + bx^n + c = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$, prin substituția $x^n = y$, se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea în y , anume $ay^2 + by + c = 0$ și la rezolvarea a două ecuații binome de forma $x^n = y_1, x^n = y_2$.

VIII.2. Inecuații fundamentale de gradul al II-lea

1. $ax^2 + bx + c > 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, S = \text{mulțimea soluțiilor}$:

Δ	a	S
$\Delta > 0$	$a > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
$\Delta > 0$	$a < 0$	(x_1, x_2)
$\Delta = 0$	$a > 0$	$\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$
$\Delta = 0$	$a < 0$	\emptyset
$\Delta < 0$	$a > 0$	\mathbb{R}
$\Delta < 0$	$a < 0$	\emptyset

2. $ax^2 + bx + c \geq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, S = \text{mulțimea soluțiilor}$:

Δ	a	S
$\Delta > 0$	$a > 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
$\Delta > 0$	$a < 0$	$[x_1, x_2]$
$\Delta = 0$	$a > 0$	\mathbb{R}
$\Delta = 0$	$a < 0$	$\{x_1\}$
$\Delta < 0$	$a > 0$	\mathbb{R}
$\Delta < 0$	$a < 0$	\emptyset

Inecuațiile $ax^2 + bx + c < 0$ și $ax^2 + bx + c \leq 0$ se reduc la cazurile precedente (prin înmulțirea cu -1 și schimbarea sensului acestor inegalități).

VIII.3. Rezolvarea sistemelor de ecuații cu coeficienți reali

1. *Sisteme formate dintr-o ecuație de gradul al doilea și una de gradul întâi*

Aceste sisteme sunt de forma:

$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \end{cases}$$

Se rezolvă prin metoda **substituției**. În prima ecuație putem presupune că sau $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ (dacă $a = b = 0$ atunci prima ecuație dispare). Presupunând că $b \neq 0$, atunci ecuația $ax + by + c = 0$ este echivalentă cu ecuația $y = \frac{-c - ax}{b} = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Dacă substituim în y în cea de a doua ecuație a sistemului (S), atunci (S) este echivalent cu sistemul:

$$(S') \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ a_1x^2 + b_1x\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + c_1\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + d_1x + e_1\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + f_1 = 0 \end{cases}$$

Rezolvând ecuația a doua a sistemului (S') obținem valorile lui x , apoi, înlocuind în prima ecuație din sistemul (S') obținem valorile lui y .

Discuție. 1. Dacă ecuația a doua din sistemul (S') are două rădăcini reale, atunci sistemul (S) are o soluție reală.

2. Dacă ecuația a doua din sistemul (S') are două rădăcini egale, sau în cazul când aceasta este o ecuație de gradul întâi, atunci sistemul (S) are două soluții reale.

3. Dacă ecuația a doua a sistemului (S') nu are nici o rădăcină reală, atunci sistemul (S) nu are soluții reale.

2. Sisteme de ecuații omogene

Un astfel de sistem este de forma:

$$(S) \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

Sistemul (S) se numește **omogen** deoarece polinoamele $a_1X^2 + b_1XY + c_1Y^2$ și $a_2X^2 + b_2XY + c_2Y^2$ sunt omogene, în sensul că toate monoamele care apar în scrierea lor au același grad.

Presupunem mai întâi că $d_1 \neq 0$ și $d_2 \neq 0$. Există în acest caz numerele reale α și β diferite de zero astfel încât $\alpha d_1 + \beta d_2 = 0$. Se înmulțește prima ecuație cu α și cea de a doua cu β și apoi se adună. Se obține sistemul echivalent:

$$(S') \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ (\alpha a_2 + \beta a_1)x^2 + (\alpha b_2 + \beta b_1)xy + (\alpha c_2 + \beta c_1)y^2 = 0 \end{cases}$$

Notăm coeficientul ecuației a doua din (S') cu a_3, b_3, c_3 . Atunci:

$$(S') \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_3x^2 + b_3xy + c_3y^2 = 0 \end{cases}$$

Deoarece $d_1 \neq 0$ sistemul (S') nu are soluția $x = 0$ și $y = 0$. Putem presupune că $x \neq 0$. Împărțim ecuația a doua din (S') cu x^2 și obținem ecuația de gradul al doilea în

$\frac{y}{x} : c_3 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + b_3 \frac{y}{x} + a_3 = 0$ care, rezolvată, ne dă în general două valori k_1 și k_2 pentru $\frac{y}{x}$ adică, $\frac{y}{x} = k_1$ și $\frac{y}{x} = k_2$.

Rezolvarea sistemului (S) este echivalentă cu rezolvarea următoarelor două sisteme:

$$(S_1) \begin{cases} y = k_1 x \\ a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1 \end{cases} \text{ și } (S_2) \begin{cases} y = k_2 x \\ a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = d_1 \end{cases}$$

Când $d_1 = 0$ și $d_2 = 0$, sistemul (S) este de forma (S') și rezolvarea se continuă ca pentru sistemul (S').

3. Sisteme de ecuații simetrice

Definiția VIII.3.3. *O ecuație în două necunoscute se zice simetrică dacă înlocuind x cu y și y cu x , ecuația nu se schimbă.*

Rezolvarea sistemelor de ecuații simetrice se face astfel: se introduc necunoscutele auxiliare s și p date de relațiile: $x + y = s$ și $xy = p$.

Prin introducerea acestor noi necunoscute s și p , în foarte multe cazuri sistemul se reduce la un sistem de ecuații format dintr-o ecuație de gradul întâi și o ecuație de gradul al doilea în necunoscutele s și p .

IX. Ecuații algebrice de gradul III, IV și V

IX.1. Ecuația reciprocă de gradul al treilea

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a ecuației $(x \pm 1)[ax^2 + (b + a)x + a] = 0$

IX.2. Ecuația reciprocă de gradul al patrulea

$$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Rezolvarea ei se reduce la aceea a unei ecuații de gradul al doilea, prin substituția $y = x + \frac{1}{x}$: $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) \pm b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$ sau $ay^2 + by + c - 2a = 0$.

IX.2. Ecuația bipătrată

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Cu $x = y^2$, rezultă ecuația $ay^2 + by + c = 0$, deci $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

X. Logaritmi

Definiția X.1. *Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$ și $b \in \mathbb{R}^*$ două numere reale. Se numește logaritm al numărului real strict pozitiv b exponentul la care trebuie ridicat numărul a , numit bază, pentru a obține numărul b .*

Logaritmul numărului b în baza a se notează $\log_a b$

Evident $b = a^{\log_a b}$. Pentru $a = 10$ obținem logaritmi zecimali, iar pentru $a = e$ obținem logaritmi naturali.

Proprietăți:

1. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c, (b, c > 0)$;
2. $\log_a a = 1$;
3. $\log_a 1 = 0$
4. $\log_a a^c = c$; $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a x^{2n} = 2n \log_a x$, $x \neq 0$
5. $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b, (b > 0, m \in \mathbb{N}, m \geq 2)$;
6. $\log_a b \log_b a = 1$;
7. Formula de schimbare a bazei logaritmului: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
8. $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
9. $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\text{colog}_a x = -\log_a x$
10. $a > 1$ și $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x < 0$; $a > 1$ și $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$;
11. $0 < a < 1$ și $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x > 0$; $0 < a < 1$ și $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$;
12. $a > 1$ și $0 < x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;
13. $x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1 \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$;
14. $x > 0, a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \log_a x = \log_a x^n$;
15. $x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$.

Operații cu logaritmi zecimali

1. Suma a doi logaritmi: se adună separat caracteristicile (se adună algebric, întrucât există caracteristici pozitive și caracteristici negative) și separat mantisele (care sunt întotdeauna pozitive în afară de cazul în care întregul logaritm este negativ); apoi cele două rezultate se adună algebric.
2. Scăderea a doi logaritmi: se adună descăzutul cu logaritmul scăzătorului.
3. Înmulțirea unui logaritm cu un număr întreg: când caracteristica este pozitivă, înmulțirea se face în mod obișnuit; când caracteristica este negativă se înmulțește separat mantisa și separat caracteristica și se adună algebric rezultatele.
4. Împărțirea unui logaritm printr-un număr întreg: în cazul când caracteristica este pozitivă, împărțirea se face obișnuit. În cazul în care este negativă se împarte separat mantisa și separat caracteristica; dacă nu se împarte exact cu caracteristica prin numărul dat, atunci se adaugă caracteristicii atâtea unități negative câte sunt necesare pentru a avea un număr divizibil prin împărțitorul respectiv și, pentru a nu se modifica rezultatul, se adaugă și mantisei tot atâtea unități, dar pozitive.

X.1. Ecuații și inecuații logaritmice fundamentale

1. $\log_a x = b, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$. Soluția: $x = a^b$.
2. $\log_a x > b, b \in \mathbb{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(a^b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$(0, a^b)$

3. $\log_a x < b$, $b \in \mathbb{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(0, a^b)$
$0 < a < 1$	$(a^b, +\infty)$

X.2. Ecuații și inecuații exponențiale fundamentale

1. $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Soluția $x = \log_a b$, $b \in \mathbb{R}$
2. $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \leq 0$, nu are nici o soluție reală
3. $a^x > b$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	b	S
$a > 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$a > 0$	$b < 0$	\mathbb{R}
$a \neq 1$		

4. $a^x < b$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	b	S
$a > 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$a > 0$	$b < 0$	\emptyset
$a \neq 1$		

XI. Metoda inducției matematice

XI.1. Axioma de recurență a lui Peano

Fie A o parte a lui \mathbb{N} astfel că:

1. $0 \in A$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}), n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. Atunci rezultă $A = \mathbb{N}$.

XI.2. Metoda inducției matematice

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de numărul natural n . Dacă avem:

1. $P(0)$ adevărată;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ adevărată $\Rightarrow P(n+1)$ adevărată, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n .

În demonstrație prin metoda inducției matematice (recurență) poate apărea în loc de 0, un număr natural n_0 , dacă în propoziția $P(n)$ pe care vrem să demonstrăm am constatat $n \neq n_0$.

XI.2. Variantă a metodei inducției matematice

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de numărul natural $n \neq n_0$. Dacă avem:

1. $P(n_0)$ adevărată;

2. $(\forall m \in \mathbb{N}, n_0 \leq m \leq k) P(m) \text{ adevărată} \Rightarrow P(k) \text{ adevărată}$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq n_0$.

XII. Analiză combinatorie

XII.1. Permutări

Definiția XII.1.1. *O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulțime ordonată și se notază (a_1, a_2, \dots, a_n) .*

Definiția XII.1.2. *Se numesc permutări ale unei mulțimi A cu n elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente ale lui n . Numărul permutărilor a n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, este $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$; $0! = 1$ (prin definiție).*

$$\text{Factoriale (proprietăți): } n! = (n-1)! \cdot n; n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$$

XII.2. Aranjamente

Definiția XII.2.1. *Se numesc aranjamente a n elemente luate câte m ($m \leq n$) ale unei mulțimi A cu n elemente, toate submulțimile ordonate cu câte m elemente care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A . Se notează A_n^m .*

Numărul aranjamentelor a n elemente luate câte m este:

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, n \geq m.$$

$$\text{Proprietăți: } A_n^n = P_n; A_n^n = \frac{n!}{0!} \text{ sau } A_n^n = n!; A_n^{n-1} = A_n^n; A_n^0 = 1.$$

XII.3. Combinări

Definiția XII.3.1. *Se numesc combinări a n elemente luate câte m ($m \leq n$) ale unei mulțimi A cu n elemente toate submulțimile cu câte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A . Se notează C_n^m .*

Proprietăți:

- $C_n^1 = n; C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1;$
- $C_n^n = C_n^{n-m}; C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1};$
- Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n ;
- $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1};$
- $\frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_n!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \dots C_{n-(p_1+\dots+p_{m-1})}^{p_m}$ unde $p_1 + \dots + p_{m-1} < n$

XII.4. Binomul lui Newton

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n$$

$$(x-a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + (-1)^n C_n^n a^n \text{ unde } n \in \mathbb{N}$$

Proprietăți:

- Termenul de rang $k+1$ este $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k$;

2. $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k; C_{n+1}^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k;$
3. $T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1}$ sau $T_{k+2} = -\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{a}{x} T_{k+1};$
4. Numărul termenilor dezvoltării $(x \pm a)^n$ este $n+1$;
5. Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sunt egali.

Relații importante:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n; C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}; C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1};$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

Dezvoltări particulare uzuale:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac);$
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$
5. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc;$
6. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

XII.5. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale

Dacă $S_p = 1^p + 2^p + \dots + n^p$, $p \in \mathbb{N}$, atunci avem:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}; S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}; S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

O relație care permite calculul lui S_p , când se cunosc $S_{p-1}, S_{p-2}, \dots, S_1$ este formula lui Pascal: $(n+a)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \dots + C_{p+1}^p S_1 + n$

XIII. Progresii

XIII.1. Progresii aritmetice

Definiția XIII.1.1. *Se numește progresie aritmetică un șir de numere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ în care fiecare termen, începând cu a_2 , se obține din cel precedent prin adăugarea unui număr constant numit rația progresiei.* Se notează $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Dacă a_1 este primul termen, a_n cel de-al n -lea termen (termenul general), r rația, n numărul termenilor și S_n suma celor n termeni, atunci avem:

$$a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n$$

Termenii echidistanți de extremi. Într-o progresie aritmetică suma termenilor echidistanți de extremi este egală cu suma termenilor extremi: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m + 1$), atunci există un termen în mijloc, a_{m+1} , astfel încât $2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$.

Condiția necesară și suficientă pentru ca trei termeni a, b, c , luate în această ordine, să formeze o progresie aritmetică, este să avem $2b = a + c$.

XIII.2. Progresii geometrice

Definiția XIII.2.1. Se numește progresie geometrică un șir de numere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ în care fiecare termen, începând cu a_2 , se obține din cel precedent prin înmulțirea acestuia cu un același număr q ($q \neq 0$) numit rație. Se notează $\div \div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Dacă a_1 este primul termen, a_n cel de-al n -lea termen (termenul general), q rația, n numărul termenilor și S_n suma celor n termeni, atunci avem:

$$a_n = qa_{n-1}, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}, n \geq 2 \text{ (} a_n \text{ în funcție de } a_1, q \text{ și } n \text{)}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}, q \neq 1$$

Termeni echidistanți de extremi. Într-o progresie geometrică, produsul a doi termeni echidistanți de extremi este egal cu produsul termenilor extremi: $a_p a_{n-p+1} = a_1 a_n$.

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m + 1$) atunci există un termen la mijloc, a_{m+1} , astfel încât $a_{m+1}^2 = a_1 a_{2m+1}$.

Condiția necesară și suficientă ca trei numere a, b, c , luate în această ordine, să formeze o progresie geometrică este să avem $b^2 = ac$.

XIV. Polinoame

XIV.1. Forma algebrică a unui polinom

$f \in C[x]$ este $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + a_n$, unde n este gradul, a_0 – coeficientul dominant, a_n – termenul liber.

Funcția polinomială asociată lui $f \in C[x]$ este $\tilde{f}: C \rightarrow C$ $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha) \forall \alpha \in C$; $f(\alpha)$ fiind valoarea polinomului f în α .

Teorema împărțirii cu rest: $\forall f, g \in C[x], g \neq 0$ există polinoamele unice $q, r \in C[x]$ astfel încât $f = gq + r$, grad $r < \text{grad } g$.

Împărțirea unui polinom cu $X-a$: Restul împărțirii polinomului $f \in C[x], f \neq 0$ la $X-a$ este $f(a)$.

Schema lui Horner: ne ajută să aflăm câtul $q = b_0X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \dots + b_{n-1}$ al împărțirii polinomului $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_n$ la binomul $X-a$; precum și restul acestei împărțiri $r = f(a)$;

	a_0	a_1	\dots	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	\dots	$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$	$r = f(a) = ab_{n-1} + a_n$

XIV.2. Divizibilitatea polinoamelor

Definiția XIV.2.1. Fie $f, g \in C[x]$, spunem că g divide pe f și notăm $g|f$ dacă $\exists q \in C[x]$ astfel încât $f = gq$.

Proprietăți:

1. $a|f, \forall a \in C^*, \forall f \in C[x]$;
2. $g|f$ și $f \neq 0 \Leftrightarrow r = 0$;
3. $g|f$ și $f \neq 0 \Rightarrow \text{grad } f \geq \text{grad } g$;
4. $a \in C^* \Rightarrow af|f$;
5. $f|f$ (reflexivitate);
6. $f|g$ și $g|h \Rightarrow f|h$ (tranzitivitate);
7. $f|g$ și $g|f \Rightarrow \exists a \in C^*$ cu $f = ag$ (f, g sunt asociate în divizibilitate).

Definiția XIV.2.2. Un polinom d se numește cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al polinoamelor f și g dacă:

- 1) $d|f$ și $d|g$.
- 2) $d'|f$ și $d'|g \Rightarrow d'|d$ și notăm $d = (f, g)$

Definiția XIV.2.3. Dacă $d=1$ atunci f și g se numesc prime între ele.

Definiția XIV.2.4. Un polinom m se numește cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al polinoamelor f și g dacă:

- 1) $f|m$ și $g|m$.
- 2) $f|m'$ și $g|m' \Rightarrow m|m'$

Teoremă. Dacă $d = (f, g)$ atunci $m = \frac{f \cdot g}{d}$

XIV.3. Rădăcinile polinoamelor

Definiția XIV.3.1. Numărul $\alpha \in C$ se numește rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $\tilde{f}(\alpha) = 0$.

Teorema lui Bezout: Numărul $\alpha \in C$ este rădăcină a polinomului $f \neq 0 \Leftrightarrow (X - \alpha) | f$.

Definiția XIV.3.2. Numărul α se numește rădăcină multiplă de ordinul p a polinomului $f \neq 0$ dacă și numai dacă $(X - \alpha) | f$ iar $(X - \alpha)^{p+1}$ nu-l divide pe f .

Teoremă: Dacă $f \in C[x]$ este un polinom de gradul n și $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sunt rădăcinile lui cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ atunci $f = a_0(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \dots (X - x_n)^{m_n}$ unde a_0 este coeficientul dominant al lui f , iar $m_1 + m_2 + \dots + m_n = \text{grad } f$.

XIV.4. Ecuații algebrice

Definiția XIV.4.1. O ecuație de forma $f(x) = 0$ unde $f \neq 0$ este un polinom, se numește ecuație algebrică.

Teorema lui Abel-Ruffini: Ecuațiile algebrice de grad mai mare decât patru nu se pot rezolva prin radicali.

Teorema lui D'Alambert-Gauss: Orice ecuație algebrică de grad mai mare sau egal cu unu, are cel puțin o rădăcină (complexă).

Formulele lui Viète: Dacă numerele x_1, x_2, \dots, x_n sunt rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[x]$, $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$ atunci:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0} \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0} \\ \dots \\ x_1 x_2 \dots x_k + x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} + \dots + x_{m-k+1} x_{m-k+2} \dots x_m = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \\ \dots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{array} \right.$$

XIV.5. Polinoame cu coeficienți din $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$

Teoremă: Dacă $f \in \mathbb{R}[x]$ admite pe $\alpha = a + ib$, $b \neq 0$ ca rădăcină atunci el admite ca rădăcină și pe $\bar{\alpha} = a - ib$, iar α și $\bar{\alpha}$ au același ordin, de multiplicitate.

Teoremă: Dacă un polinom $f \in \mathbb{Q}[x]$ admite pe $\alpha = a + b\sqrt{d}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) ca rădăcină, atunci el admite și pe $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{d}$, iar α și $\bar{\alpha}$ au același ordin, de multiplicitate.

Teoremă: Dacă un polinom $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\text{grad } f \geq 1$, admite o rădăcină $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$ atunci $p \mid a_n$ și $q \mid a_0$.

În particular dacă $f \in \mathbb{Z}[x]$ are rădăcina $\alpha = p \in \mathbb{Z}$ atunci $p \mid a_n$.

XV. Permutări, matrici, determinanți

XV.1. Permutări

Definiție XV.1.1. Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$, φ se numește permutare de gradul n dacă $\varphi: A \rightarrow A$ și φ bijectivă.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

S_n – mulțimea permutărilor de grad n ; $\text{card } S_n = n!$

$$1_A = e, \text{ permutarea identică } e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Compunerea permutărilor

Fie $\sigma, \tau \in S_n$ atunci $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(\tau(1)) & \varphi(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix} \in S_n$

Transpoziții

Definiția XV.1.2. Fie $i, j \in A$, $i \neq j$, $\tau_{ij} \in S_n$, τ_{ij} se numește transpoziție dacă:

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j, & \text{daca } k = i \\ i, & \text{daca } k = j \\ k, & \text{daca } k \neq i, j \end{cases} \quad \tau_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

Observații: 1. $(\tau_{ij})^{-1} = \tau_{ij}$;

2. Numărul transpozițiilor de grad n este C_n^2

Signatura (semnul) unei permutări

Definiția XV.1.3. Fie $(i, j) \in A \times A$, $i < j$, (i, j) se numește inversiune a lui φ dacă

$$\varphi(j) < \varphi(i), m(\varphi) \text{ numărul inversiunilor lui } \varphi: 0 \leq m(\varphi) \leq C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};$$

$\varepsilon(\varphi) = (-1)^{m(\varphi)}$ se numește signatura lui φ .

Observații: 1. Permutarea φ se numește *pară* dacă $\varepsilon(\varphi) = 1$, respectiv *impară* dacă $\varepsilon(\varphi) = -1$;

2. Orice transpoziție este impară;

$$3. \varepsilon(\varphi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\varphi(i) - \varphi(j)}{i - j};$$

$$4. \varepsilon(\varphi \circ \sigma) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\sigma).$$

XV.2. Matrici

Definiția XV.2.1. Fie $M = \{1, 2, \dots, m\}$ și $N = \{1, 2, \dots, n\}$. O aplicație $A: M \times N \rightarrow C$ $A(i, j) = a_{ij}$ se numește matrice de tipul (m, n) : cu m linii și n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ și notăm } M_{m,n}(C) \text{ mulțimea matricelor de tipul } (m, n) \text{ cu}$$

elemente numere complexe.

Definiția XV.2.2. Dacă $m=n$ atunci matricea se numește pătratică de ordinul n , iar mulțimea lor se notează $M_n(C)$.

Definiția XV.2.3. Două matrici $A, B \in M_{m,n}(C)$ sunt egale dacă și numai dacă $a_{ij} = b_{ij} \forall (i, j) \in M \times N$.

Operații cu matrici:

1. Adunarea

Fie $A, B \in M_{m,n}(C)$ atunci $C = A + B \in M_{m,n}(C)$ unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall (i, j) \in M \times N$ este suma lor.

Proprietăți $\forall A, B, C \in M_{m,n}(C)$:

1. $A+B = B+A$ (comutativitate);
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (asociativitate);

3. $A+0 = 0+A = A$ (elementul neutru este matricea nula 0);

4. $A+(-A) = (-A)+A = 0$ (opusul lui A este $-A$).

2. Înmulțirea cu scalari

Fie $A \in M_{m,n}(C)$ și $\lambda \in C$ atunci $B = \lambda A \in M_{m,n}(C)$ unde $b_{ij} = \lambda_{ij} \quad \forall (i,j) \in M \times N$ este produsul matricei A cu scalarul λ .

Proprietăți $\forall A, B \in M_{m,n}(C)$ și $\lambda, \mu \in C$.

1. $1 \cdot A = A$;
2. $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$;
3. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
4. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \mu(\lambda A)$.

3. Transpusa unei matrici

Fie $A \in M_{m,n}(C)$ atunci ${}^tA \in M_{n,m}(C)$ unde ${}^t a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall (i,j) \in M \times N$

4. Înmulțirea matricelor

Fie $A \in M_{m,n}(C)$ și $B \in M_{n,p}(C)$ atunci $C = A \cdot B \in M_{m,p}(C)$ unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$,

$\forall (i,j) \in M \times N$ este produsul lor

Proprietăți:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (asociativitate);

$$2. A \cdot I_n = I_n \cdot A \text{ (element neutru-matricea unitate)} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

4. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.

XV.3. Determinanți

Fie $M_n(C)$ – mulțimea matricilor pătrate de ordin n cu elemente din C :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A \in M_n(C)$$

Definiția XV.3.1. *Se numește determinantul matricii A, numărul*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} din matricea A :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1j-1} & \mathbf{a}_{1j+1} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2j-1} & \mathbf{a}_{2j+1} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{i-11} & \mathbf{a}_{i-12} & \dots & \mathbf{a}_{i-1j-1} & \mathbf{a}_{i-1j+1} & \dots & \mathbf{a}_{i-1n} \\ \mathbf{a}_{i+11} & \mathbf{a}_{i+12} & \dots & \mathbf{a}_{i+1j-1} & \mathbf{a}_{i+1j+1} & \dots & \mathbf{a}_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nj-1} & \mathbf{a}_{nj+1} & \dots & \mathbf{a}_{nm} \end{vmatrix}$$

Dacă $C = AB$, atunci $\det C = \det A \det B$ ($A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$)

Determinantul de ordinul 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinantul de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

XV.4. Inversa unei matrici

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, dacă $\det A \neq 0$ există $A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AA^{-1} = I_n$, $I_n \in M_n(\mathbb{C})$, I_n – matricea unitate:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

XVI. Systeme lineare

XVI.1. Notatii:

a_{ij} – coeficienți, x_I – necunoscute, b_i – termeni liberi;

[illegible]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix},$$

r – rangul matricii A = rangul sistemului

XVI.2. Compatibilitatea

Sistemul (S) este compatibil determinat dacă:

1. $r = m = n$ (sistem de tip Cramer) și $\det A = \Delta \neq 0$, atunci $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, unde

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. $r = n < m$ și $\text{rang } \bar{A} = r$.

Sistemul (S) este incompatibil dacă $r \leq \min(m, n)$ și $\text{rang } \bar{A} = r + 1$.

XVI.3. Sisteme omogene ($b_i = 0$)

1. Sunt compatibile determinate ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) dacă $r = n$;
2. Sunt compatibile nedeterminate dacă $r < n$.

XVII. Structuri algebrice

XVII.1. Monoid

Fie $(M, *)$, $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$, M -nevidă.

Axiomele monoidului:

M1. $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in M$ (asociativitatea);

M2. $\exists e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x \quad \forall x \in M$ (e element neutru);

dacă **M3.** $x * y = y * x, \quad \forall x, y \in M$ monoidul este comutativ.

Ex: 1. $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot) sunt monoizi comutativi;

2. $(F(E), \circ)$ monoid necomutativ ($F(E)$ este mulțimea funcțiilor $f: E \rightarrow E$, E – nevidă, \circ – compunerea funcțiilor).

XVII.2. Grup

Fie $(G, *)$, $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x * y$, G -nevidă.

Axiomele grupului:

G1. $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in G$ (asociativitatea);

G2. $\exists e \in G$ astfel încât $x * e = e * x = x \quad \forall x \in G$ (e element neutru);

G3. $\forall x \in G \quad \exists x' \in G$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$ (x' simetricul lui x);

dacă **G4.** $x * y = y * x, \quad \forall x, y \in G$ grupul este comutativ (sau abelian).

Ex: 1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ – grupuri comutative;

2. (R_n, \oplus) – grupul resturilor modulo n , comutativ;
3. $(M_n(Z), +)$ – grupul matricilor pătrate de ordin n cu elemente din Z ;
4. (K, \circ) – grupul lui Klein (al simetriilor față de sistemul de coordonate), comutativ;
5. (σ_n, \circ) – grupul simetric de grad n (al permutărilor de n elemente) nu este comutativ;

Definiția XVII.2.1. *Fie $(G, *)$ grup, $H \subset G$, H este subgrup dacă $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$ și $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$ (x' este simetricul lui x în raport cu operația $*$);*

Fie grupurile (G_1, \perp) , (G_2, Δ) :

Definiția XVII.2.2. $f: G_1 \rightarrow G_2$ se numește morfism de grupuri dacă $f(x \perp y) = f(x) \Delta f(y)$, $\forall x, y \in G_1$.

Definiția XVII.2.3. $f: G_1 \rightarrow G_2$ se numește izomorfism de grupuri dacă f este bijectivă și $f(x \perp y) = f(x) \Delta f(y)$, $\forall x, y \in G_1$.

Definiția XVII.2.4. $f: G_1 \rightarrow G_2$ se numește automorfism (endomorfism) al grupului G_1 , dacă f este un izomorfism (morfism).

XVII.3. Inel

Fie $(A, +, \bullet)$, $A \times A \rightarrow A$, $(x, y) \rightarrow x + y$ și $A \times A \rightarrow A$, $(x, y) \rightarrow x \bullet y$, A nevidă;

Definiția XVII.3.1. $(A, +, \bullet)$ este inel dacă:

G. $(A, +)$ este grup abelian;

M. (A, \bullet) este monoid și

D. \bullet este distributivă față de $+$:

$$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$$

$$(y + z) \bullet x = y \bullet x + z \bullet x, \forall x, y, z \in A$$

dacă **C.** $x \bullet y = y \bullet x \forall x, y \in A$, inelul este comutativ.

Exemple de inele:

1. $(Z, +, \cdot)$ – inelul numerelor întregi;
2. $(Z[i], +, \cdot)$ – inelul întregilor lui Gauss, $Z[i] = \{z = a + bi \mid a, b \in Z\}$
3. (R_n, \oplus, \otimes) – inelul resturilor modulo n ;
4. $(M_n(A), +, \cdot)$ – inelul matricelor pătrate (cu elemente din inelul A);
5. $(Z_n, +, \cdot)$ – inelul claselor de resturi modulo n .

Fie inelele $(A, \perp, *)$ și (A', Δ, \circ) :

Definiția XVII.3.1. $f: A \rightarrow A'$ se numește izomorfism de inele dacă f este bijectivă și $f(x \perp y) = f(x) \Delta f(y)$, $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in A$.

Definiția XVII.3.2. $(A, +, \bullet)$ este inel fără divizori ai lui zero dacă $x \neq 0$, $y \neq 0$ implică $x \bullet y \neq 0$.

Definiția XVII.3.3. *Un inel comutativ cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero se numește domeniu integritate.*

Definiția XVII.3.4. *Dacă $(A, +, \cdot)$ este inel, atunci $(A[X], +, \cdot)$ este inelul comutativ al polinoamelor cu coeficienți în A .*

$f \in A[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ este forma algebrică a unui polinom de nedeterminată X cu coeficienți în A :

- dacă $a_n \neq 0$, $\text{grad } f = n$ (a_n – coeficient dominant);

- dacă $a_0 = a_1 = \dots = a_n, f = 0$ (polinom nul), $\text{grad } 0 = -\infty$.

Proprietăți: 1. $\text{grad } (f+g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$;

2. $\text{grad } f \cdot g \leq \text{grad } f + \text{grad } g$.

Teoremă. Dacă A este domeniu de integritate atunci $A[X]$ este domeniu de integritate și $\text{grad } f \cdot g = \text{grad } f + \text{grad } g, \forall f, g \in A[X]$.

XVII.4. Corp

Fie $(K, +, \bullet), K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x + y$ și $K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x \bullet y, K$ – nevidă.

Definiția XVII.4.1. $(K, +, \bullet)$ este corp dacă $(K, +, \bullet)$ este inel, $0 \neq 1$ și $\forall x \in K, x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in K$, astfel încât $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = 1$.

Dacă $x \bullet y = y \bullet x \forall x, y \in K$, corpul este comutativ.

Exemple de corpuri:

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ – corpul numerelor raționale;
2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – corpul numerelor reale;
3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – corpul numerelor complexe;
4. $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), +, \cdot)$ – corpul numerelor pătratice ($d \in \mathbb{Z}, d$ – liber de pătrate);
5. $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ – corpul claselor de resturi modulo p ($p \in \mathbb{N}^*, p > 1, p$ – număr prim).

Definiția XVII.4.2. Fie *corpurile* $(K, \perp, *)$ și $(K', \Delta, \circ), f: K \rightarrow K'$ este *izomorfism de corpuri* dacă f este *bijectivă*, $f(x \perp y) = f(x) \Delta f(y), f(x * y) = f(x) \circ f(y) \forall x, y \in K$.

Teorema împărțirii cu rest în mulțimea $K[X]$, K corp comutativ și $g \in K[X], g \neq 0: \forall f \in K[X]$, există polinoamele $q, r \in K[X]$, unic determinate astfel încât $f = q \cdot g + r$, $\text{grad } r < \text{grad } g$.

GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

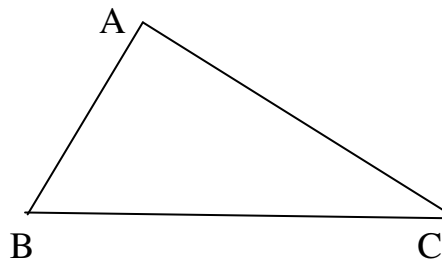
Notății:

- lungimea laturilor triunghiului ABC, $AB = c, BC = a, CA = b$;
- lungimile segmentelor importante în triunghi:
 - $AD = h_a$ ($AD \perp BC, h_a$ lungimea înălțimii din A, $D \in BC$);
 - $AD = m_a$ ($BD = DC, m_a$ lungimea medianei din A, $D \in (BC)$);
 - $AD = b_a$ ($\angle BAD = \angle CAD, b_a$ lungimea bisectoarei din A, $D \in (BC)$);
- $\frac{a + b + c}{2} = p$ (p – semiperimetrul triunghiului ABC);
- A_{ABC} – aria triunghiului ABC, notată și S ;
- R – raza cercului circumscris unui poligon;
- r – raza cercului înscris într-un poligon;
- l_n – latura poligonului regulat cu n laturi;
- a_n – apotema poligonului regulat cu n laturi;
- P – perimetrul poligonului;
- A_{lat} – aria laterală (prismă, piramidă, trunchi de piramidă);
- A_{tot} – aria totală, notată și A ;
- V – volumul.

I. Triunghiul

Inegalități geometrice:

1. $m(\angle MBA) > m(\angle A)$, $m(\angle MBA) > m(\angle C)$, $\angle MBA$ este unghi exterior;
2. $a+b > c$, $b+c > a$, $a+c > b$
3. $a > |b-c|$, $b > |c-a|$, $c > |a-b|$
4. $m_a < \frac{b+c}{2}$
5. $p < m_a + m_b + m_c < P$



Teorema bisectoarei ($\angle BAD \equiv \angle DAC$)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}; BD = \frac{a \cdot c}{b+c}; DC = \frac{a \cdot b}{b+c}$$

Observații:

1. Centrul cercului circumscris unui triunghi este punctul de intersecție al mediatoarelor;
2. Centrul cercului înscris într-un triunghi este punctul de intersecție al bisectoarelor;
3. Centrul de greutate al triunghiului este punctul de intersecție al medianelor.
4. Ortocentrul triunghiului este punctul de intersecție al înălțimilor.

II. Poligoane convexe

Suma S_n a măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi:

$$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Poligonul regulat este înscritibil într-un cerc și poate fi circumscris unui alt cerc.

III. Relații metrice în triunghi

III.1. Triunghiul dreptunghic

ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$, $AD \perp BC$)

1. Teorema lui Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$;
2. Teorema catetei: $b^2 = a \cdot CD$, $c^2 = a \cdot BD$;
3. Teorema înălțimii: $h_a^2 = BD \cdot DC$;
4. $h_a = \frac{b \cdot c}{a}$, $h_b = b$, $h_c = c$;
5. $m_a = \frac{a}{2}$, $m_b^2 = a^2 - \frac{3}{4}b^2$, $m_c^2 = a^2 - \frac{3}{4}c^2$;
6. $b_a = \frac{b \cdot c}{b+c} \sqrt{2}$; $b_b = c \cdot \sqrt{\frac{2a}{a+c}}$; $b_c = b \cdot \sqrt{\frac{2a}{a+c}}$;
7. $A_{ABC} = \frac{b \cdot c}{2}$;

$$8. R = \frac{a}{2};$$

$$9. r = \frac{b \cdot c}{a + b + c};$$

10. Relații exprimate prin funcții trigonometrice:

$$b = a \cdot \sin B, b = a \cdot \cos C, b = c \cdot \operatorname{tg} B, b = c \cdot \operatorname{ctg} C.$$

III.2. Triunghiul dreptunghic ABC ($a = b = c$)

$$1. h_a = m_a = b_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$2. A_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4};$$

$$3. R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$4. r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

III.3. Triunghiul oarecare ABC ($AD \perp BC$)

1. Teorema lui Pitagora generalizată:

$$a) b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BD, \text{ dacă } m(\angle B) < 90^\circ;$$

$$b) b^2 = a^2 + c^2 + 2a \cdot BD, \text{ dacă } m(\angle B) > 90^\circ;$$

2. Relațiile lui Steward $O \in (BC)$:

$$b^2 \cdot BO + c^2 \cdot CO - a^2 \cdot AO = a \cdot BO \cdot CO;$$

$$3. m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$4. h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$5. b_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{p(p-a)bc};$$

$$6. A_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = S;$$

$$7. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$8. R = \frac{abc}{4S};$$

$$9. r = \frac{S}{p}.$$

III.4. Relații exprimate prin funcții trigonometrice

$$1. \text{ Teorema sinusurilor: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

$$2. \text{ Teorema cosinusului: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

3. Teorema tangentelor: $tg \frac{A+B}{2} tg \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b}$;

4. $S = \frac{ab \sin C}{2}, S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}, S = p(p-a) tg \frac{A}{2}, S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$;

5. $p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

6. $h_a = 2R \sin B \sin C$;

7. $m_a^2 = R^2 (\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C)$;

8. $b_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$;

9. $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$;

10. $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;

11. $tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

IV. Patrulatere

IV.1. Paralelogramul

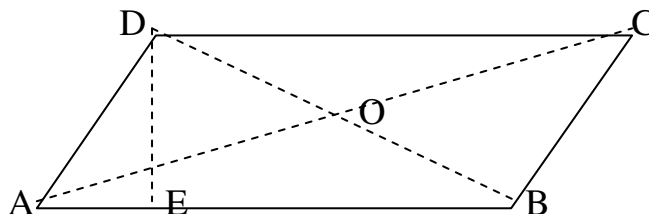
ABCD ($AB \parallel CD, BC \parallel AD, DE \perp AB$)

$AC \cap BD = \{O\}$

$OA = OC, OB = OD$

$A_{ABCD} = AB \cdot DE$

$A_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

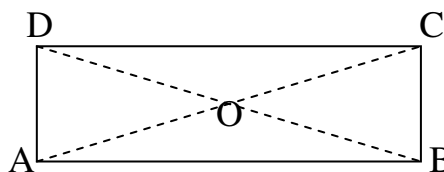


IV.2. Dreptunghiul

ABCD ($AB \parallel CD, BC \parallel AD, \angle A = 90^\circ$)

$AC = BD$

$A_{ABCD} = AB \cdot AD$



IV.3. Rombul

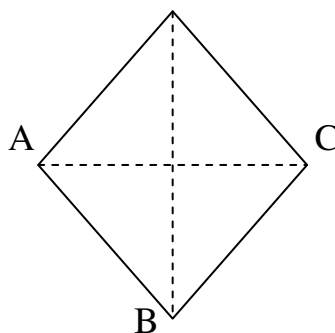
ABCD ($AB \parallel CD, BC \parallel AD, AB = BC$)

$AC = d_1, BD = d_2$

$AB = a$

$AC \perp BD$

$$A_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



IV.4. Pătratul

ABCD ($AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB = AC$)

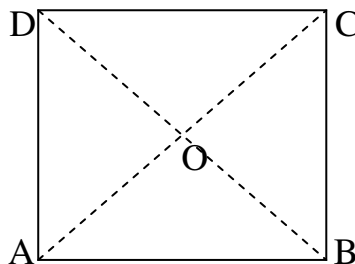
$\angle A = 90^\circ$, $AB = a$, $AC = d$)

$AC = BD$

$AC \perp BD$

$d = a\sqrt{2}$

$A_{ABCD} = a^2$.

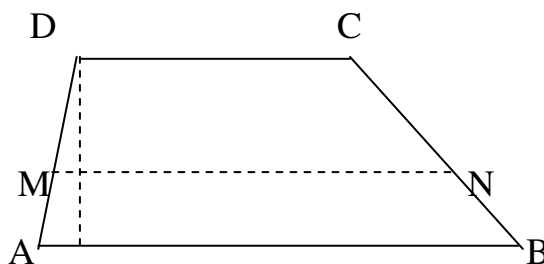
**IV.5. Trapezul**

ABCD ($AB \parallel CD$, $AB = B$, $DC = b$)

MN – linie mijlocie) M

$$MN = \frac{B + b}{2}$$

$$A_{ABCD} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = MN \cdot h$$

**V. Poligoane înscrise în cerc****V.1. Patrulaterul înscris în cerc**

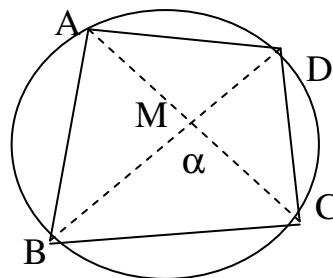
$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$;

$\angle BAC \equiv \angle BDC$;

Teorema lui Ptolomeu

$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$

**V.2. Poligoane regulate înscrise în cercul de rază R**

1. Triunghiul echilateral: $l_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = \frac{R}{2}$, $S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$;

2. Pătratul: $l_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $S = 2R^2$;

3. Hexagonul regulat: $l_6 = R$, $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$;

4. Poligonul regulat cu n laturi: $l_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$, $a_n = R \cos \frac{\pi}{n}$, $S = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = p \cdot a_n$

unde $p = \frac{n \cdot l_n}{2}$.

VI. Cercul

Lungimi și arii: $l_{\text{cerc}} = 2\pi R$, $A_{\text{cerc}} = \pi R^2$;

$$l_{\text{arcAB}} = \frac{\pi R \alpha}{180}; \alpha - \text{măsura în grade};$$

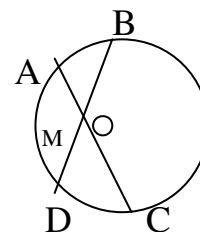
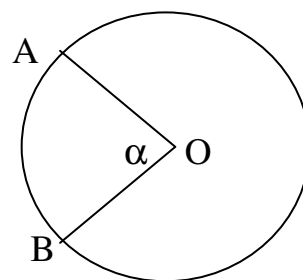
$$A_{\text{sectorAB}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{180}$$

$$\mu(\angle AOB) = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} (\mu - \text{măsura în radiani})$$

Unghi cu vârful în interiorul cercului:

$$m(\angle AOB) = m(\widehat{AB})$$

$$m(\angle AMB) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2}$$

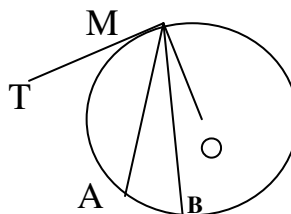


Unghi cu vârful pe cerc

$$OM \perp MT$$

$$m(\angle AMB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

$$m(\angle AMT) = \frac{m(\widehat{AM})}{2}$$

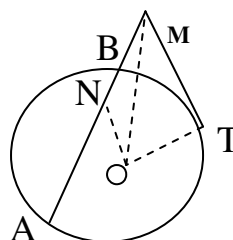
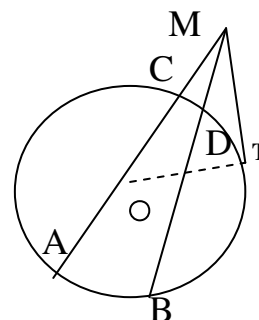


Unghi cu vârful în exteriorul cercului

$$OT \perp MT$$

$$m(\angle AMB) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$$

$$m(\angle AMB) = \frac{m(\widehat{BT}) - m(\widehat{DT})}{2}$$



Puterea unui punct față de un cerc

$$OT \perp MT$$

$$\rho(M) = MA \cdot MB = OM^2 - r^2 = MT^2$$

$$\rho(N) = NA \cdot NB = r^2 - ON^2$$

VII. Complemente de geometrie plană

Triunghiul ortic este triunghiul determinat de picioarele înălțimilor unui triunghi; dintre toate triunghiurile cu vârfurile respectiv pe laturile unui triunghi (sau pe prelungiri), triunghiul ortic are cel mai mic perimetru.

Ceviana este dreapta determinată de vârful unui triunghi și un punct al laturii opuse.

Teorema lui Ceva: Cevienele AM , BN , CP ale triunghiului ABC sunt concurente dacă și numai dacă $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

Teorema lui Menelaus: Pe dreptele BC , CA , AB , determinate de laturile triunghiului ABC , se consideră punctele M , N respectiv P situate două dintre ele pe laturile triunghiului și unul pe prelungirea unei laturi, sau toate trei pe prelungiri de laturi. Punctele M , N , P sunt colineare dacă și numai dacă: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

Dreapta lui Euler: Într-un triunghi oarecare, punctele H , O și G (ortocentrul, centrul cercului circumscris și centrul de greutate) sunt colineare.

Dreapta lui Simson: Proiecțiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi, pe drepte suport ale laturilor acestuia, sunt colineare.

Cercul exînscriș: unui triunghi este tangent la o latură a triunghiului și la prelungirile celorlalte două laturi; centrul cercului exînscriș este intersecția bisectoarei unui unghi interior cu bisectoarele celorlalte două unghiuri exterioare.

Cercul lui Euler (cercul celor nouă puncte): picioarele înălțimilor unui triunghi, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfurile triunghiului sunt conciclice.

VIII. Poliedre

VIII.1. Prisma

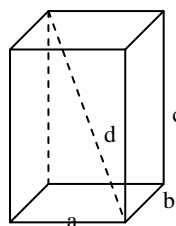
1. Paralelipipedul dreptunghic

$$A_{\text{lat}} = 2(a + b)c;$$

$$A_{\text{tot}} = 2(ab + ac + bc);$$

$$V = abc$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



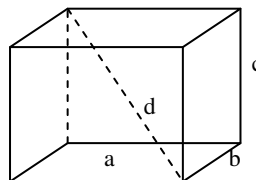
2. Cubul

(de latură $a = b = c$)

$$A = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$a = a\sqrt{3}$$

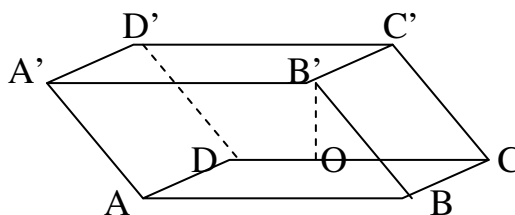


3. Paralelipipedul

$$B'O \perp (ABC)$$

$$B'O = h$$

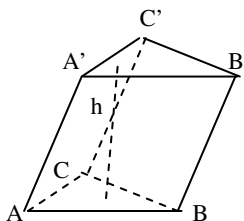
$$V = A_{ABCD} \cdot h$$



4. Prisma

(dreaptă sau oblică, de înălțime h)

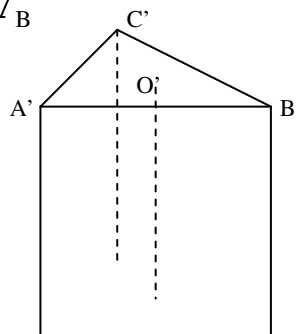
$$V = A_{\text{bazei}} \cdot h$$



Prisma triunghiulară regulată

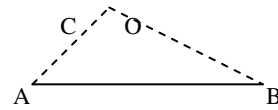
($AB = a$)

$$A_{\text{lat}} = 3a \cdot h$$



$$A_{\text{tot}} = 3a \cdot h + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$$



VIII.2. Piramida

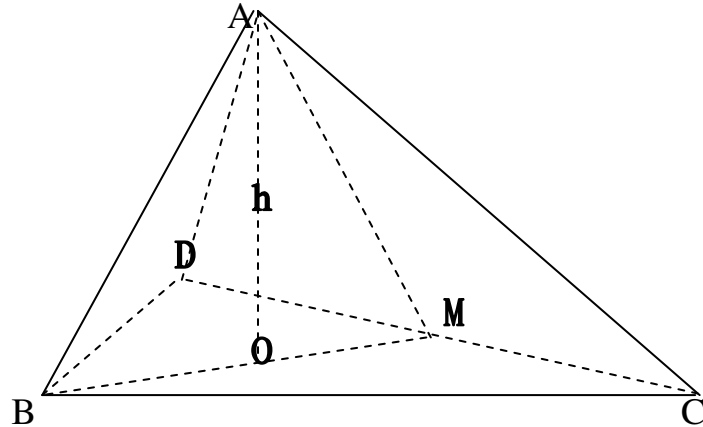
1. Tetraedrul regulat

(toate muchiile sunt congruente,
 $AO \perp (BCD)$, $AM \perp DC$)

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}, AM = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin \hat{ABO} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin \hat{AMO} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$A = a^2 \sqrt{3}; V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$



2. Tetraedrul dreptunghic

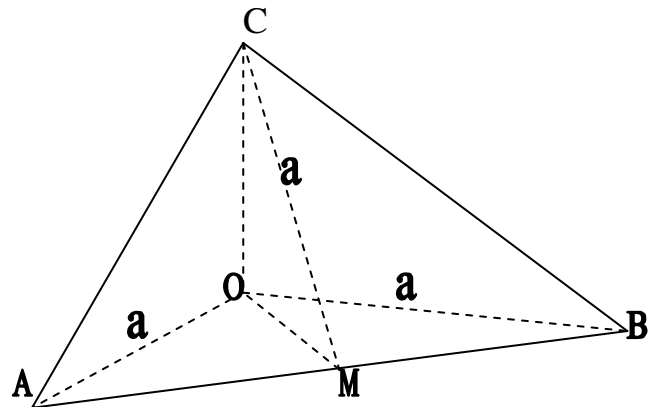
($OA \perp OB \perp OC \perp OA$,
 $OA = OB = OC = a$, $CM \perp AB$)

$$OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CM = \frac{a\sqrt{6}}{2}; AB = a\sqrt{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{tot}} = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{a^3}{6}$$



3. Piramida triunghiulară regulată

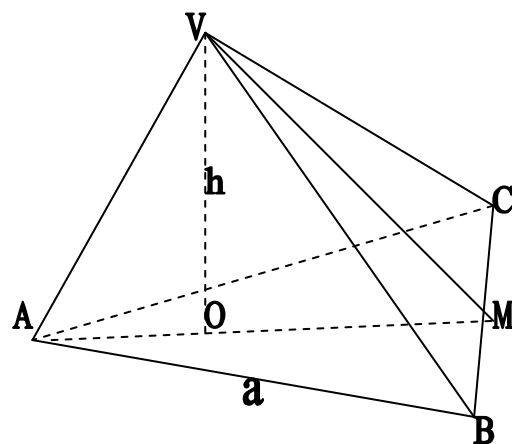
($AB = AC = BC = A$, $VA = VB = VC$
 $VM \perp BC$, VM – apotemă)

$$VM = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$$

$$A_{\text{lat}} = \frac{3a \cdot VM}{2}$$

$$A_{\text{tot}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3a \cdot VM}{2}$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{h}{3}$$



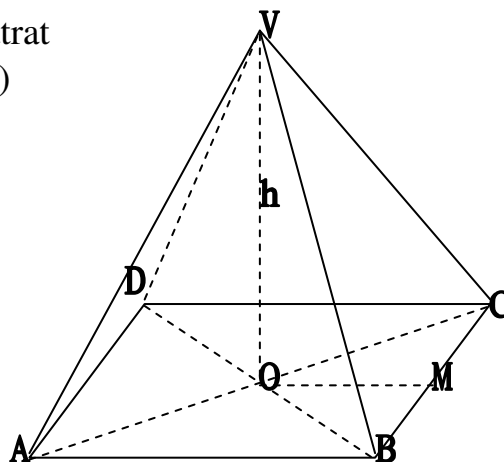
Piramida patrulateră regulată (ABCD–pătrat de latură a , $VA = VB = VC = VD$, $VM \perp BC$)

$$VM = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$A_{lat} = 2a \cdot VM$$

$$A_{tot} = a^2 + 2a \cdot VM$$

$$V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$



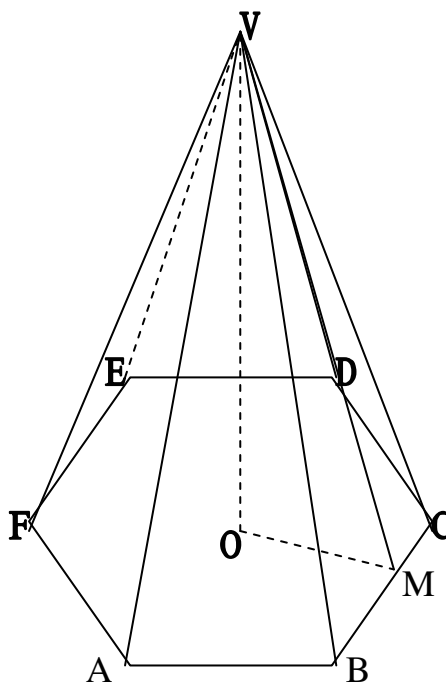
4. Piramida hexagonală regulată (ABCDEF – hexagon regulat $VM \perp BC$, $VA = VB = VC = VD = VE = VF = a$)

$$VM = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}$$

$$A_{lat} = 3a \cdot VM$$

$$A_{tot} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot VM$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}h}{2}$$



5. Piramida regulată

(piciorul înălțimii coincide cu centrul circumscris bazei):

$$A_{lat} = \frac{P_{bazei} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$A_{tot} = A_{bazei} + A_{lat}; V = \frac{A_{bazei} \cdot h}{3}$$

6. Piramida (de înălțime h):

$$A_{tot} = A_{bazei} + A_{lat}; V = \frac{A_{bazei} \cdot h}{3}$$

VIII.3. Trunchiul de piramidă

(B – aria bazei mari, b – aria bazei mici, h – înălțimea)

1. Trunchiul de piramidă oarecare:

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b})$$

2. Trunchiul de piramidă regulat

P – perimetrul bazei mari,

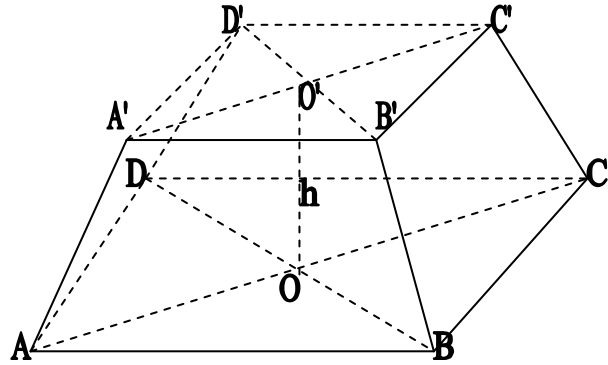
p – perimetrul bazei mici,

a_p – apotema

$$A_{lat} = \frac{(P + p)a_p}{2}$$

$$A_{tot} = B + b + \frac{(P + p)a_p}{2}$$

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b})$$

**VIII.4. Poliedrul regulat**

Relația lui Euler: $v - m + f = 2$

(v – numărul vârfurilor, m – numărul muchiilor, f – numărul fețelor)

Tipurile de poliedre regulate:

- tetraedrul regulat: $f = 4$, $v = 4$, $m = 6$;
- cubul (hexaedru regulat): $f = 6$, $v = 8$, $m = 12$;
- octaedrul regulat: $f = 8$, $v = 6$, $m = 12$;
- dodecaedrul regulat: $f = 12$, $v = 20$, $m = 30$;
- icosaedrul regulat: $f = 20$, $v = 12$, $m = 30$;

IX. Corpuri rotunde

Notății: R – rază, G – generatoare, h – înălțime

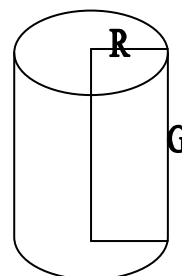
IX.1. Cilindrul circular drept

$$h = G$$

$$A_{lat} = 2\pi R G$$

$$A_{tot} = 2\pi R(R + G)$$

$$V = \pi R^2 h$$



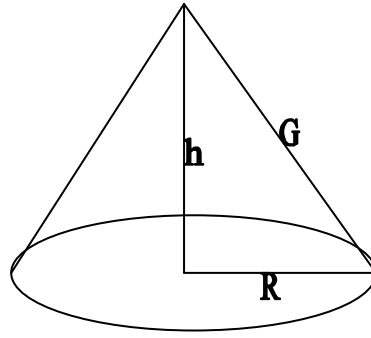
IX.2. Conul circular drept

$$G^2 = h^2 + R^2$$

$$A_{lat} = \pi R G$$

$$A_{tot} = \pi R(R + G)$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

**IX.3. Trunchiul de con**

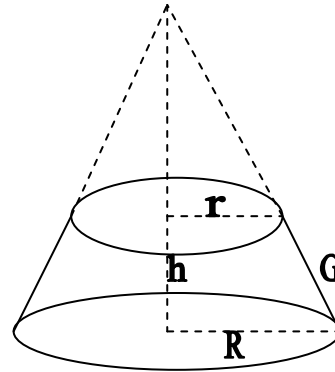
(r – raza bazei mici)

$$G^2 = h^2 + (R - r)^2$$

$$A_{lat} = \pi G(R + r)$$

$$A_{tot} = \pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

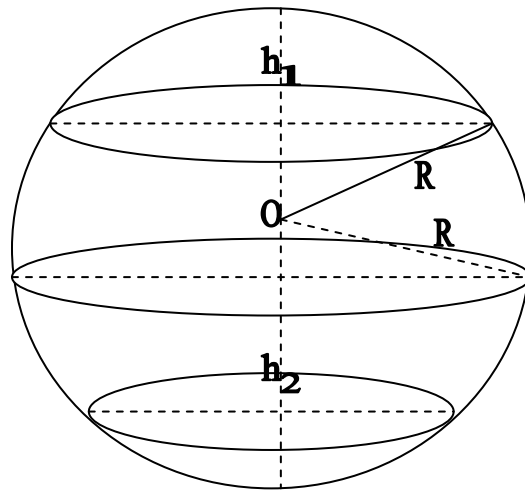
**IX.4. Sfera**

$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

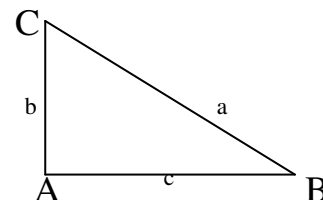
$$A_{calotei\ sferice} = 2\pi R h_1$$

$$A_{zonei} = 2\pi R h_2$$

**X. Funcții trigonometrice****X.1. Definiții în triunghiul dreptunghic**

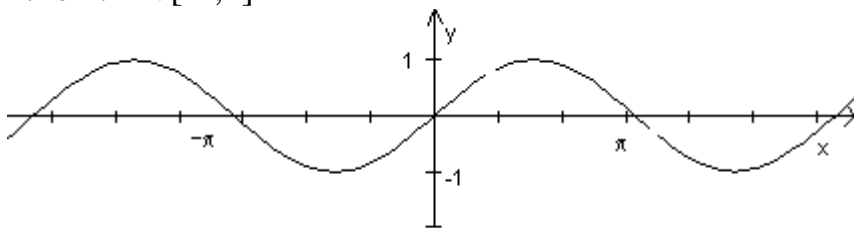
$$\sin B = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{c}{a}, \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}, \sin B = \cos C, \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C$$



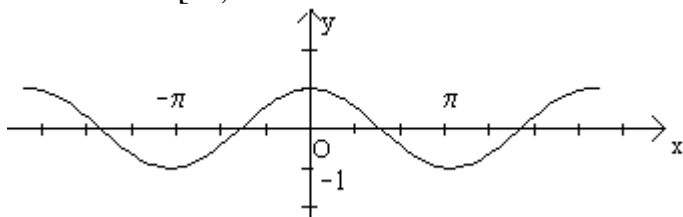
X.2. Proprietățile funcțiilor trigonometrice

1. $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$



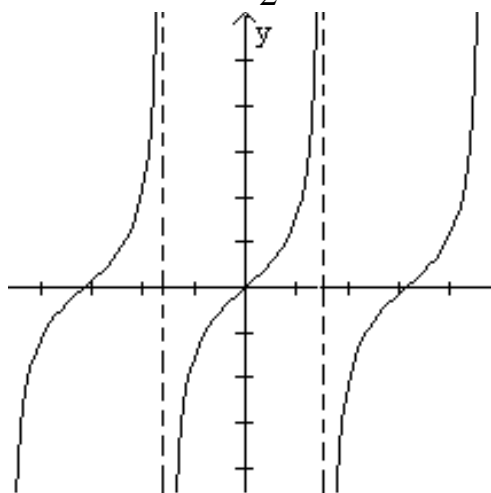
$$\sin(-x) = -\sin x, \sin(x + 2k\pi) = \sin x, (k \in \mathbb{Z})$$

2. $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

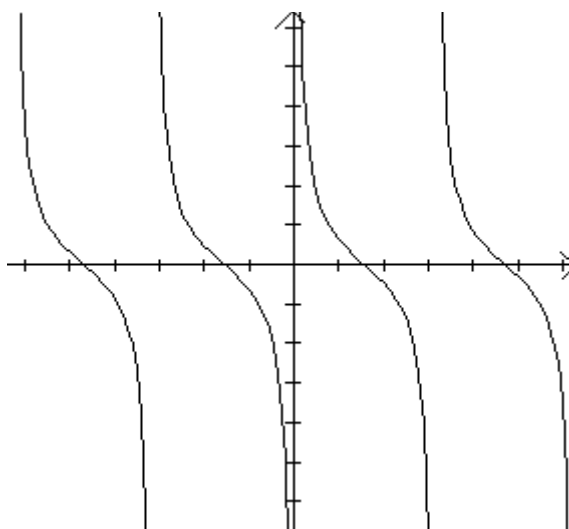


$$\cos(-x) = \cos x, \cos(x + 2k\pi) = \cos x, (k \in \mathbb{Z})$$

3. $\operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$



4. $\operatorname{ctg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$



$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, (k \in \mathbb{Z})$$

XI. Formule trigonometrice

XI.1. Relații între funcțiile trigonometrice ale unui argument:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$3. \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$4. \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$5. \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$6. \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$7. \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin(2\pi - \alpha) = \cos \alpha; \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

XI.2. Formule de adunare:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

XI.3. Formule pentru multipli de argument:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \dots$$

$$\cos n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \cdot \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \cdot \sin^5 \alpha - \dots$$

XI.4. Formule pentru jumătăți de argument:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

XI.5. Sume, diferențe și produse:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = -\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

XII. Inversarea funcțiilor trigonometrice

$$\text{XII.1. } \arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin y = x \quad \sin x = y$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\text{XII.2. } \arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

XII.3. $\text{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \text{arctg}(-x) = -\text{arctg } x$

XII.4. $\text{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \text{arctg}(-x) = \pi - \text{arctg } x$

XIII. Soluțiile ecuațiilor trigonometrice simple

XIII.1. Ecuații fundamentale

1. $\sin x = a, a \in [-1, 1] \Rightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

2. $\cos x = a, a \in [-1, 1] \Rightarrow x \in \{\pm \arccos a + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

3. $\text{tg } x = a, a \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \{\arctg a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

4. $\text{ctg } x = a, a \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \{\text{accctg } a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

XIII.2. Tabele de valori:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
funcția								
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	1
$\text{tg } x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0
$\text{ctg } x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
funcția									
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
funcția							

$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

XIV. Elemente de geometrie analitică

XIV.1. Segmente

1. Distanța dintre două puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. Panta dreptei AB: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

3. Coordonatele (x, y) ale mijlocului segmentului AB: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

4. Coordonatele punctului M care împarte segmentul (AB) în raportul k :

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, y = \frac{y_1 + ky_2}{2}$$

XIV.2. Ecuația dreptei

1. Drepte paralele cu axele de coordonate:

$$(d): x = a \text{ (} d \parallel Oy \text{)}, (d): y = a \text{ (} d \parallel Ox \text{)}$$

2. Dreapta determinată de punctul $M_o(x_o, y_o)$ și vectorul nul $\vec{a}(u, v): (d): r = \vec{r}_o + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, \vec{r}_o -vectorul de poziție a lui M_o ; r -vectorul de poziție a unui punct M al dreptei d .

$$(d): \begin{cases} x = x_o + ut \\ y = y_o + vt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ ecuațiile parametrice;}$$

3. Ecuația explicită: $y = mx + n$ ($m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, m – panta, n – ordonata la origine);

4. Ecuația prin tăieturi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, (a, b \in \mathbb{R}^*)$;

5. Ecuația dreptei de pantă m , prin punctul $M_o(x_o, y_o)$: $y - y_o = m(x - x_o)$, ($m \neq 0$);

6. Ecuația dreptei determinată de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2) \text{ sau}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Ecuația generală: $ax + by + c = 0$;

8. Aria triunghiului ABC ($A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$): $A_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ dac\u0103 } \Delta = 0 \text{ atunci } A, B, C \text{ sunt colineare}$$

9. Pozi\u021bia relativ\u0103 a dreptelor (d_1) \u015fi (d_2):

$$(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ \u015fi } (d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$d_1 = d_2, \text{ dac\u0103 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$d_1 \parallel d_2, \text{ dac\u0103 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2};$$

$$d_1 \neq d_2 \text{ \u015fi } d_1 \cap d_2 \neq \emptyset, \text{ dac\u0103 } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

10. Distan\u021ba de la punctul $M_o(x_o, y_o)$ la dreapta (h): $ax + by + c = 0$

$$d(M, h) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

11. Unghiul α determinat de dreptele:

$$(d_1): y = m_1x + n_1 \text{ \u015fi } (d_2): y = m_2x + n_2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}, (m_1m_2 \neq -1)$$

$$d_1 \perp d_2, \text{ dac\u0103 } m_1m_2 = -1$$

XIV.3. Cercul

Cercul C de centru $M(a, b)$ \u015fi raz\u0103 r :

1. Ecua\u021bia cercului $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; dac\u0103 $M(a, b) = O(0, 0)$: $x^2 + y^2 = r^2$;

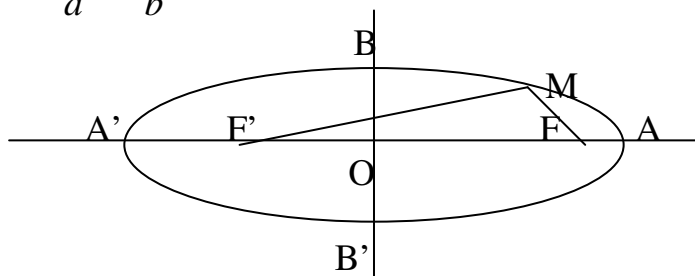
2. Ecua\u021bia general\u0103: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, unde $a = -\frac{m}{2}$, $b = -\frac{n}{2}$ \u015fi

$$r^2 = \frac{1}{4}(m^2 + n^2) - p.$$

XIV.4. Conice raportate la axele de simetrie

1. Elipsa E : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$, $MF + MF' = 2a$, $M \in E$

$$\text{Ecua\u021bia elipsei: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, b^2 + c^2 = a^2$$



Ecua\u021bia tangentei \u00een punctul $M(x_o, y_o)$, $M \in E$:

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} - 1 = 0$$

2. Hiperbola H : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $|MF - MF'| = 2a$, $M \in H$.

Ecuția hiperbolei: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $c^2 - b^2 = a^2$

Ecuția tangentei în $M_o(x_o, y_o)$, $M_o \in H$.

$$\frac{xx_o}{a^2} - \frac{yy_o}{b^2} - 1 = 0$$

3. Parabola P : $F(\frac{p}{2}, 0)$, $h: x = -\frac{p}{2}$ (h – dreapta directoare): $d(M, h) = MF$, $M \in P$.

Ecuția parabolei P : $y^2 = 2px$

Ecuția tangentei în $M_o(x_o, y_o)$, $M_o \in P$: $yy_o = p(x + x_o)$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. Șiruri

I.1. Șiruri și limite

Definiția I.1.1. *Se numește șir de numere reale o funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$.*

Definiția I.1.2. *Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ se numește crescător (respectiv descrescător) dacă $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (respectiv $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Șirurile crescătoare și șirurile descrescătoare se numesc șiruri monotone.*

Definiția I.1.3. *Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă $\exists M > 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Notăție: $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definiția I.1.4. *Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ are limita a și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă în orice vecinătate a punctului a se află toți termenii șirului începând de la un anumit rang.*

Definiția I.1.5. *Șirul este convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n > N_\varepsilon$ $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Definiția I.1.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dacă $\exists \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n > \varepsilon$, $\forall n > N_\varepsilon$

Definiția I.1.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n < -\varepsilon$, $\forall n > N_\varepsilon$

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, **atunci şirul este** **divergent**.

I.2. Criterii suficiente de convergență sau de existență a limitei unui şir

1. dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $b_n \geq 0$ și $|a_n - a| \leq b_n$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$;
2. dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ și $a_n \geq b_n$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
3. dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ și $a_n \leq b_n$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$;
4. orice şir monoton și mărginit este convergent (criteriul lui Weierstrass);
5. dacă $b_n \leq a_n \leq c_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$;
6. criteriul lui Stolz:
 - dacă $(b_n)_{n \geq 0}$ crescător: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ și există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n};$$
 - dacă $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n > 0$ și există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (Cesaro);
 - - dacă $(b_n)_{n \geq 0}$ crescător: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ și există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n};$$

I.2. Operații cu şiruri convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a, b \in \mathbb{R}$$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha a, \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, (dacă $b \neq 0$)

I.3. Operații cu şiruri care au limită

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$$

1. dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, b \in \mathbb{R}$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$;

3. dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $b \in \mathbb{R}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases};$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$;

5. dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$;

6. dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ dacă $a_n > 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ dacă $a_n < 0$.

I.4. Șiruri tip

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -1 < q < 1 \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \\ \text{nu exista,} & \text{dacă } q \leq -1 \end{cases}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 n^k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0 \end{cases}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + \dots + b_{p-1} n + b_p} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < p \\ +\infty, & \text{dacă } k > p \text{ și } a_0 b_p > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } k > p \text{ și } a_0 b_p < 0 \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } k = p \end{cases}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \frac{1}{1 - q}, \text{ dacă } |q| < 1;$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty;$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0;$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^p + 2^p + \dots + n^p} = 1, \forall p \geq 1;$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)^n = e.$$

II. Limite de funcții

Notății: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, α - punct de acumulare a lui D ;

II.1. Definiții ale limitei

Definiția II.1.1. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$, *dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui α astfel încât $\forall x \in D \cap U, x \neq \alpha$, să rezulte $f(x) \in V$.*

Definiția II.1.2. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$, *dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 0}, x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, având $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ (criteriul cu șiruri);*

Definiția II.1.3. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$, *dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in D \setminus \{\alpha\}$ și $|x - \alpha| < \delta_\varepsilon$ rezultă $|f(x) - l| < \varepsilon$;*

Definiția II.1.4. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$, *dacă $l_s = l_d = l$, unde $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} f(x)$ și*

$$l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} f(x).$$

II.2. Operații cu limite de funcții

$f: D \rightarrow \mathbb{R}, g: D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha$ - punct de acumulare a lui D , $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l_1, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$;

$$1. \lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \alpha} af(x) = a \cdot l_1;$$

$$4. \text{daca } l_2 \neq 0, \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

II.3. Limite tip

$$1. \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 \alpha^m + b_1 \alpha^{m-1} + \dots + b_m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \alpha} a^x = a^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{ dac\u0103 } a > 1;$$

Definiția II.4.2. Fie $\alpha \in D$, α este punct de discontinuitate de prima speță dacă există și sunt finite limitele laterale în α , dar funcția nu este continuă în α .

Definiția II.4.3. Fie $\alpha \in D$, α este punct de discontinuitate de speță a doua dacă nu este de prima speță.

Teoremă. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I – interval și f continuă pe I , atunci $J = f(I)$ este interval (o funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval).

III. Funcții derivabile

III.1. Definiția derivatei într-un punct

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, x_0 – punct de acumulare a lui E :

$$\triangleright f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_0 + h \in E}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\triangleright f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\triangleright f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$$

Interpretarea geometrică:

- dacă $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ este ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(x_0, f(x_0))$;
- dacă f este continuă în x_0 , $f'_d(x_0) = +\infty$, $f'_s(x_0) = -\infty$, sau invers, x_0 este punct de întoarcere al graficului;
- dacă f este continuă în x_0 și există derivatele laterale în x_0 , cel puțin una fiind finită, dar f nu este derivabilă în x_0 , x_0 este punct unghiular al graficului.

III.2. Reguli de derivare

$f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, f, g derivabile în $x \in E$:

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(cf)'(x) = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$;
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. dacă $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;
5. dacă $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabilă în $x_0 \in I$ și g derivabilă în $y_0 = f(x_0)$, atunci $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$;
6. dacă $f: I \rightarrow J$ continuă, bijectivă și derivabilă în x_0 cu $f'(x_0) \neq 0$, atunci $f^{-1}: J \rightarrow I$ este derivabilă în y_0 , $y_0 = f(x_0)$ și $f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

III.3. Derivatele funcțiilor elementare

Funcția (condiții)	Derivata (condiții)
C	0

$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$x^r, r \in \mathbb{R}, x > 0$	rx^{r-1}
$\sqrt{x}, x \geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
$\log_a x, a \neq 1, a > 0, x > 0$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$
$a^x, a \neq 1, a > 0, x > 0$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x, x \in [0, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (0, 1)$
$\arccos x, x \in [0, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (0, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

III.4. Derivata funcțiilor compuse

Funcția (condiții)	Derivata (condiții)
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu^{n-1} \cdot u'$
$u^r, r \in \mathbb{R}, u > 0$	$ux^{r-1} \cdot u'$
$\sqrt{u}, u \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}, u > 0$
$\log_a u, a \neq 1, a > 0, u > 0$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'}{u}$
$\ln u, u > 0$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
$a^u, a \neq 1, a > 0$	$a^u \ln a \cdot u'$
e^u	$e^u \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$

$\operatorname{tg} u, \cos u \neq 0$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\operatorname{ctg} u, \sin u \neq 0$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\arcsin u, u \in [-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u \in (-1, 1)$
$\arccos u, u \in [-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', u \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$u^v, u > 0$	$u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$

III.5. Derivatele de ordin superior ale unor funcții elementare

Funcția (condiții)	Derivata de ordinul $n(f^{(n)})$
$x^m, m \in \mathbb{N}, m \geq n$	$m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
$\frac{1}{x^m}, m \in \mathbb{N}$	$(-1)^n m(m-1)\dots(m-n+1) \frac{1}{x^{m+n}}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a)^n \cdot a^x$
$\ln x$	$(-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{x^n}$
Funcția (condiții)	Derivata de ordinul $n(f^{(n)})$
$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Formula lui Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + C_n^1 f^{(n-1)} \cdot g' + C_n^2 f^{(n-2)} \cdot g'' + \dots + C_n^{n-1} f' \cdot g^{(n-1)} + C_n^n f \cdot g^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}, f^{(0)} = f$$

III.6. Proprietăți ale funcțiilor derivabile

Teorema lui Fermat:

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe I . În orice punct extrem local din interiorul lui I , f' este nulă.

Teorema lui Rolle:

Dacă funcția continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b)$ atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange:

Dacă funcția continuă $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe (a,b) , atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Teoremă. Dacă funcția f este continuă și derivabilă pe I (I – interval deschis), atunci:

1. între două rădăcini consecutive ale funcției există cel puțin o rădăcină a derivatei;
2. între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției.

Teorema lui Cauchy:

Dacă $f, g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) și $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

IV. Asimptote

IV.1. Asimptote orizontale ($f:D \rightarrow \mathbb{R}$)

Definiția IV.1.1. **Dacă** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1$ sau $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, **dreptele** $y = l_1$ și $y = l_2$ sunt asimptote orizontale a lui f spre $+\infty$, respectiv $-\infty$

IV.2. Asimptote oblice ($f:D \rightarrow \mathbb{R}$)

Definiția IV.2.1. **Dacă** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n, m, n \in \mathbb{R}$ dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică a lui f spre $+\infty$.

Definiția IV.2.2. **Dacă** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m' \neq 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m'x] = n', m', n' \in \mathbb{R}$ dreapta $y = m'x + n'$ este asimptotă oblică a lui f spre $-\infty$.

IV.3. Asimptote verticale ($f:D \rightarrow \mathbb{R}$)

Definiția IV.3.1. **Dacă** $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = \pm\infty$, α - punct de acumulare a lui D , dreapta $x = \alpha$ este asimptotă verticală la stânga a lui f .

Definiția IV.3.2. **Dacă** $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = \pm\infty$, α - punct de acumulare a lui D , dreapta $x = \alpha$ este asimptotă verticală la dreapta a lui f .

V. Primitive

(integrale nedefinite)

Definiția V.1. **Fie funcția** $f:J \rightarrow \mathbb{R}$, J – **interval**, $F:J \rightarrow \mathbb{R}$ **este primitiva lui** f , **dacă** F **este derivabilă pe** J **și** $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in J$.

Se notează: $\int f(x)dx = F(x) + c$

Proprietăți ale primitivelor:

1. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
2. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$;

Integrarea prin părți $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

V.1. Prima metodă de schimbare a variabilei

Dacă $\varphi:I \rightarrow J$, $f:J \rightarrow \mathbb{R}$, φ derivabilă pe I , f admite primitive (F), atunci

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F \circ \varphi(t) + c$$

V.2. A doua metodă de schimbare a variabilei

Dacă $\varphi:I \rightarrow J$, $f:J \rightarrow \mathbb{R}$, φ bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I , $h = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive (H) atunci $\int f(x)dx = H \circ \varphi^{-1}(x) + c$.

V.3. Tabel de primitive: (I – interval, $I \subset \mathbb{R}$)

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$;
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, x \in (0, +\infty), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, x \in I, I \subset \mathbb{R}$;
5. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c, x \in I, I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$;
6. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$;
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c, x \in \mathbb{R}$;
8. $\int \cos x dx = \sin x + c, x \in \mathbb{R}$;
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, x \in I, I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c, x \in I, I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
11. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c, x \in I, I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;
12. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c, x \in I, I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c, x \in \mathbb{R};$$

$$14. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c, x \in (a, +\infty) \text{ sau } x \in (-\infty, -a), a > 0;$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, x \in (-a, a), a > 0$$

V.4. Primitivele funcțiilor raționale

$$1. \int (ax + b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a} (ax + b)^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}, n \neq -1, a \neq 0;$$

$$2. \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b) + c, a \neq 0;$$

$$3. \int \frac{dx}{(ax + b)^n} = -\frac{1}{(n-1)a(ax + b)^{n-1}} + c, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, a \neq 0;$$

$$4. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{x+b}{x+a} + c, a \neq b;$$

$$5. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}} + c, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac, a \neq 0.$$

Substituțiile lui Euler:

$$1. \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}, \text{ dacă } a > 0;$$

$$2. \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}, \text{ dacă } c > 0;$$

$$3. \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1), \text{ dacă } b^2 - 4ac > 0 \text{ și } x_1 \text{ este o rădăcină a ecuației } ax^2 + bx + c = 0.$$

VI. Integrale definite

IV.1. Definiția integrabilității (integrale Riemann)

Notății: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b)$ diviziune, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, ξ_i – puncte intermediare, $\sigma_\Delta(f, \xi)$ – suma Riemann: $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

Definiția VI.1.1. ***f se numește integrabilă dacă există numărul real I_f cu proprietatea: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ și orice puncte intermediare ξ_i are loc $|\sigma_\Delta(f, \xi) - I_f| < \varepsilon$ unde $\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$***

Se notează: $I_f = \int_a^b f(x) dx$

Proprietăți ale integralei definite:

1. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$
2. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$
3. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx;$
4. $\int_a^a f(x) dx = 0.$

Formula lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (F - \text{primitivă a lui } f)$$

Teorema de medie:

Dacă f continuă pe $[a, b]$, atunci $\exists \xi \in [a, b]$ astfel încât: $\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$

Formula de integrare prin părți:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Formula de schimbare de variabilă:

Dacă $\varphi : [a, b] \rightarrow J$, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă pe J , φ derivabilă cu derivata continuă pe $[a, b]$, atunci $\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$

Proprietăți de paritate:

Dacă $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă atunci: $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{daca } f \text{ impară} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{daca } f \text{ pară} \end{cases}$

VI.2. Aplicații ale integralei definite

1. Aria subgraficului $\Gamma_f, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+, f$ continuă:

$$\text{aria } \Gamma_f = \int_a^b f(x) dx$$

Aria subgraficului $\Gamma_{f,g}, f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{aria } \Gamma_{f,g} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

2. Volumul corpurilor de rotație, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+, f$ continuă:

$$\text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

3. Lungimea graficului $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, f derivabilă cu derivata continuă:

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

4. Aria suprafețelor de rotație:

$$A_f = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$